TYT GEOMETRİNİN ÖZÜ

İÇİNDEKİLER

mrkz
MERKEZ YAYINLARI

GEOMETRİK

Nokta, doğru ve düzlem gibi tanımsız kavramlar sezgiseldir ve aşağıdaki gibi gösterilir.

Nokta

A •

A noktası

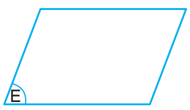
Boyutsuz geometrik şekildir.

Doğru

AB doğrusu

Aynı doğrultudaki sonsuz noktanın birleşim kümesidir.

Düzlem



E düzlemi

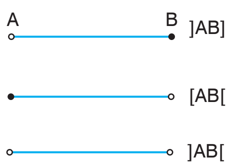
Sonsuz sayıda noktalar topluluğudur. Her yöne doğru sınırsız uzatılabilir.

DOĞRU PARÇASI

Doğru üzerindeki A ve B gibi iki nokta ile bunların arasındaki noktaların birleşim kümesidir.

[AB]

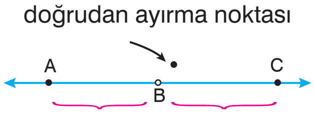
İki ucu kapalı doğru parçası uzunluğu IABI ile gösterilir.



Bir ucu açık bir ucu kapalı doğru parçası

İki ucu açık doğru parçası

doğrudan ayırma noktası



]BC yarı doğrusu

]BA yarı doğrusu

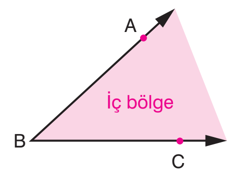
IŞIN

[AB: AB ışını

Bir noktadan başlayıp sonsuza kadar giden düz çizgiye denir.

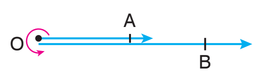
AÇI

Başlangıç noktası ortak olan iki ışının birleşimiyle oluşan kümedir. Işınlara açının kolları denir. Açısal bölge terimi açıyı iç bölgesiyle birlikte ifade etmek için kullanılır.

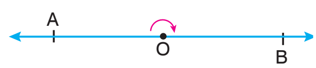


- $\widehat{ABC}$: ABC açısı
- $\widehat{ABC}$: [BA ∪ [BC
- $(\widehat{ABC})$: ABC açısal bölgesi

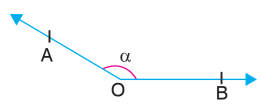
Bir açının ölçüsü 0° ile 30° arasında bir gerçel sayıdır.
Bir açının ölçüsü α ise
$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ya da $s(\widehat{ABC}) = \alpha$ ile gösterilir.



$m(\widehat{AOB}) = 360°$ ise tam açı

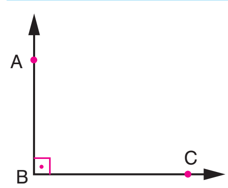


$m(\widehat{AOB}) = 180°$ ise doğru açı



$90° < m(\widehat{AOB}) < 180°$ ise geniş açı

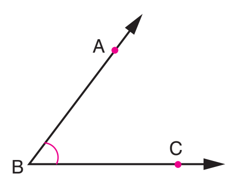
Dik Açı



$m(\widehat{ABC}) = 90°$ ise dik açı

[BA ⊥ [BC

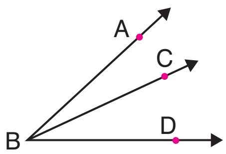
Dar Açı



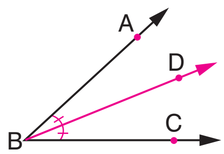
$m(\widehat{ABC}) < 90°$ ise dar açı

KAVRAMLAR

KOMŞU AÇI

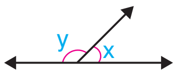


Sadece bir kolu ortak olan iki açıya komşu açılar denir. Yandaki şekilde, $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{CBD}$ komşu açılardır.

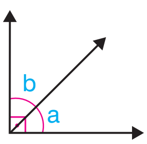


[BD açıortay

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD})$



$x+y=180°$ ise
x ile y bütünler

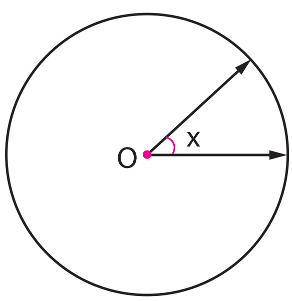


$a+b=90°$ ise
a ile b tümler

İki açı hem komşu hem de tümler ise bu iki açıya **komşu ve tümler açı** denir.

İki açı hem komşu hem de bütünler ise bu iki açıya **komşu ve bütünler açı** denir.

AÇI ÖLÇÜ BİRİMLERİ



Bir çemberin merkezinden çizilen iki ışının oluşturduğu açıyla çember birebir eşleştirilerek açı ölçü birimleri oluşturulmuştur. Günümüzde kullanılan iki ana ölçü birimi vardır. Derece (°) ve Radyan (R) aralarında,

$360°.R=2\pi.D$
eşitliği vardır.

Derece ve Radyan cinsinden iki açıyı birbirine çevirmek için $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ formülü kullanılır.

DERECENİN ALT BİRİMLERİ

Derecenin Alt Birimleri : Derecenin, dakika(') ve saniye (") olarak iki alt birimi vardır.

Aralarında $1° = 60'$ ve $1' = 60''$ eşitlikleri vardır.

Çember yayının $\frac{1}{360}$ ını gören merkez açıya 1 derece denir. (1°)

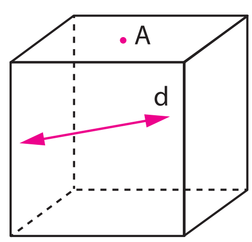
1 derecenin $\frac{1}{60}$ ına 1 dakika denir. (1')

1 dakikanın $\frac{1}{60}$ ına 1 saniye denir . (1")

Çemberle yarıçap uzunluğundaki yayı gören merkez açıya bir radyan denir. (1 R)

UZAY

Geometrik şekillerin evrensel kümesidir. Yani bütün şekiller uzayda çizilir. Sonsuz olduğundan dolayı, yandaki çizim sadece görsel tarif içindir.



NAVİGASYON

Bütünler ve tümler açı ile ilgili bir soruda, soru cümlesi bir açının tümleri ve bütünleri üzerine kurulu ise,

Açı	Tümler	Bütünler
x	90 – x	180 – x

şablonuna göre harflendirme yapacağız.

Fakat, soru cümlesi bütünler veya tümler iki açı üzerine kurulu olduğunda;

1. açı	2. açı	Tümler ise	Bütünler ise
x	y	x+y = 90°	x+y = 180°

şablonuna göre, harflendirme yapacağız. Daha sonra da verilen bilgilere göre denklem kurarak çözüm yapacağız.

ÖRNEK

Bütünlerinin tümlerine oranı $\frac{5}{2}$ olan açı kaç derecedir?

Çözüm

Soru cümlesi bir açı üzerine kurulu olduğu için,

Açı	Tümler	Bütünler
x	90 – x	180 – x

şablonuna göre, denklemi kurarsak;

$$\frac{180 - x}{90 - x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 360 - 2x = 450 - 5x$$

$$\Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30° \text{ buluruz.}$$

ÖRNEK

Tümler iki açıdan biri diğerinin 3 katından 10° fazla olduğuna göre, küçük açının bütünleri kaç derecedir?

Çözüm

Soru cümlesi iki açı üzerine kurulu olduğu için,

Küçük açı = x Büyük açı = y olsun.

Tümler oldukları için $x + y = 90°$ ve sorudaki ifadeden dolayı,

$y = 3x + 10°$ denklemleri kurulur.

İlk denklemde y yerine $3x + 10°$ ifadesini koyarsak,

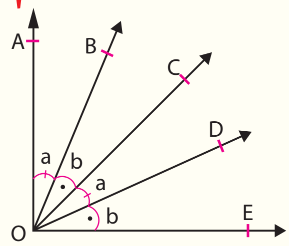
$x + 3x + 10° = 90°$

$4x = 80°$

$x = 20°$ ve $y = 70°$ olur.

Son olarak, x'in bütünleri $180° - 20° = 160°$ bulunur.

NAVİGASYON



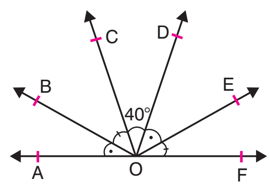
$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{COD}) = a$

$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{DOE}) = b$

Eğer şekilde eşit olan açıların değerleri bilinmiyorsa, aynı işaret konur ve aynı harfle gösterilir.

Daha sonra ise, verilen bilgilere göre, bu harfler kullanılarak denklemler kurulur.

ÖRNEK



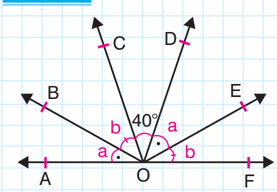
$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{DOE})$

$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{EOF})$

$m(\widehat{COD}) = 40°$

Yukarıdaki şekilde A, O ve F noktaları doğrusal olduğuna göre, **$m(\widehat{BOE})$ kaç derecedir?**

Çözüm



$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{DOE}) = a$ ve

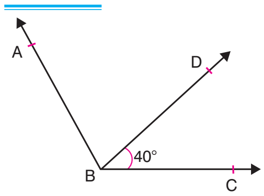
$m(\widehat{BOC}) = m(\widehat{EOF}) = b$ olsun.

A, O ve F noktaları doğrusal olduğu için, $m(\widehat{AOF}) = 180°$ dir.

Bu yüzden, $2a + 2b + 40° = 180° \Rightarrow a + b = 70°$ olur.

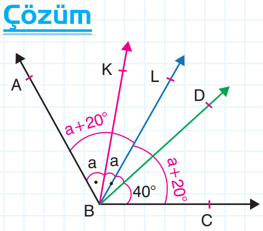
Dolayısıyla, $m(\widehat{BOE}) = a + b + 40° = 110°$ bulunur.

ÖRNEK



Yandaki şekilde verilenlere göre, $\widehat{ABC}$ nın açıortayı ile $\widehat{ABD}$ nın açıortayı arasında kalan açı kaç derecedir?

Çözüm



Önce, $m(\widehat{ABD}) = 2a$ diyelim.

$\widehat{ABD}$ nın açıortayı olarak [BK nı çizersek,

$m(\widehat{ABK}) = m(\widehat{DBK}) = a$ olur.

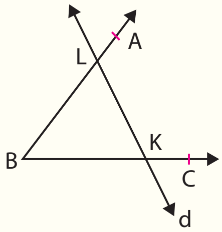
Aynı zamanda,

$m(\widehat{ABC}) = 2a + 40°$ olur. $\widehat{ABC}$ nın açıortayı olarak [BL nı çizersek, $m(\widehat{ABL}) = m(\widehat{CBL}) = a + 20°$ olur.

Dolayısıyla, $m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{ABL}) - m(\widehat{ABK})$

$\Rightarrow m(\widehat{KBL}) = a + 20° - a = 20°$ bulunur.

NAVİGASYON



$\overset{\frown}{ABC} \cap d = \{K, L\}$

$(\overset{\frown}{ABC}) \cap d = [KL]$

Geometrik şekiller birer noktalar kümesi olduğu için kesişimleri küme sembolleriyle ifade edilir.

NAVİGASYON

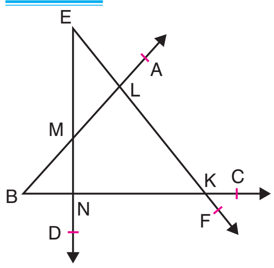
- Derece ve Radyan birimleri arasında dönüştürme yapmak için;

  $\dfrac{D}{100} = \dfrac{R}{\pi}$ formülü kullanılır.

- Derece, Dakika ve Saniye arasında dönüşüm yapmak için;

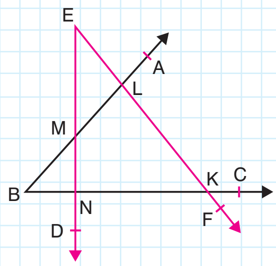
  $1° = 60' = 3600''$ bağıntısından faydalanılır.

ÖRNEK



$\overset{\frown}{ABC} \cap \overset{\frown}{DEF}$ ifadesinin eşiti nedir?

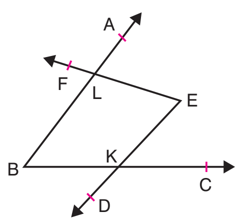
Çözüm



İki açıyı farklı renklerle gösterdiğimizde kesiştikleri yerlerin sadece K, L, M ve N noktaları olduklarını görürüz.

Dolayısıyla, cevap {K, L, M, N} kümesi olur.

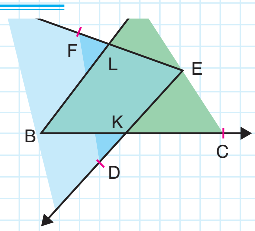
ÖRNEK



$(\overset{\frown}{ABC}) \cap (\overset{\frown}{DEF})$

ifadesinin eşiti nedir?

Çözüm



İki açısal bölgeyi farklı renklerle gösterdiğimizde, kesişimin BKEL dörtgensel bölgesi olduğunu görürüz. Dolayısıyla, cevap (BKEL) olur.

ÖRNEK

$\dfrac{\pi}{2}$ Radyan + $\dfrac{\pi}{3}$ Radyan toplamı kaç dereceye eşittir?

Çözüm

1. Yol

$\dfrac{D}{180} = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\pi} \Rightarrow D = 90°$ *olur.*

$\dfrac{D}{180} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow D = 60°$ *olur.*

Bu nedenle,

$\dfrac{\pi}{2}$ *Radyan* $+ \dfrac{\pi}{3}$ *Radyan* $= 90° + 60° = 150°$ *dir.*

2. Yol

$\pi = 180°$ *yazarakta aynı sonuca ulaşabiliriz.*

$\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} \Rightarrow \dfrac{5 \cdot \overset{50}{\cancel{180}}}{\cancel{6}} = 150°$

ÖRNEK

$35200'' = x°\ y'\ z''$ eşitliğinde x + y + z toplamı kaçtır?

Çözüm

35200"	3600"
− 32400'	9°
2800"	

2800"	60"
− 240	46"
400	
− 360	
40"	

35200' = 9° 46' 40" olduğu için,

x = 9   y = 46   z = 40 ⟹ 9 + 46 + 40 = 95 bulunur.

ÖRNEK

229632 saniyelik açı kaç derece , kaç dakika ve kaç saniyedir?

1986- ÖYS

A) 62º47'12˝ B) 63º46'22˝ C) 63º46'12˝

D) 63º47'22˝ E) 63º47'12˝

Çözüm

229632˝ | 60˝
180 | 3827´
—
496"
480
—
0163
120
—
432
420
—
012˝

229632˝ = 3827´12˝

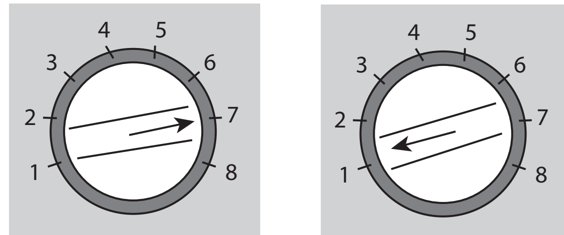
3827´ | 60´
360 | 63°
—
0227´
180
—
47´

229632˝ = 63°47´12˝

Cevap:E

ÖRNEK

8 programlı bir çamaşır makinesinin dairesel bir butonu etrafına sabitlenmiş 8 çizgi şekildeki gibi 1'den 8'e kadar numaralandırılmıştır. Numaraları ardışık sayılar olan her iki çizgi arasındaki mesafe eşit olup buton döndürüldüğünde üzerindeki ok hangi çizgiyi gösteriyorsa o çizgiye ait program seçilmiş oluyor.



7 numaralı program seçiliyken buton saat yönünde 150° döndürüldüğünde 1 numaralı program seçilmiş oluyor.

Buna göre, 1 numaralı program seçiliyken buton saat yönünde 140° döndürüldüğünde kaç numaralı program seçilmiş olur?

TYT-2019

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Çözüm

Ardışık numaralar arasındaki açı α olsun.

1 ile 7 arasında (6 bölme vardır) ve $6\alpha°$ olur.

Bütün daire tam açı oluşturduğu için 360° dir ve

$6\alpha + 150° = 360° \Rightarrow 6\alpha = 210°$ ve

$\alpha = 35°$ bulunur.

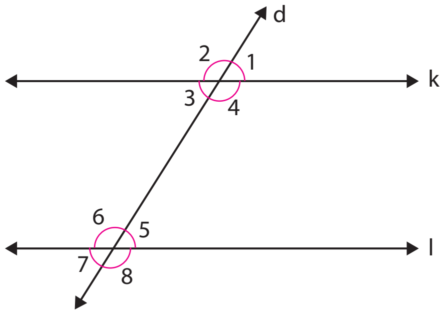
Saat yönünde 140° döndülürse $\dfrac{140°}{35°} = 4$

bulunur yani 4 aralık ilerleyecektir.

$1 + 4 = 5$ nolu programı seçilmiş olacaktır.

Cevap: C

Konu Anlatımı



k // l

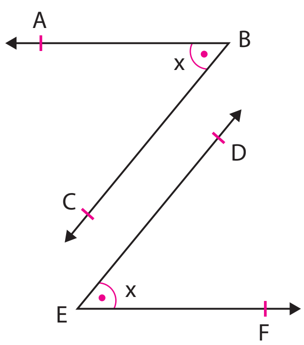
1 ve 5 numaralı açılar yöndeş
2 ve 6 numaralı açılar yöndeş
3 ve 7 numaralı açılar yöndeş
4 ve 8 numaralı açılar yöndeş
3 ve 5 numaralı açılar iç ters
4 ve 6 numaralı açılar iç ters
1 ve 7 numaralı açılar dış ters
2 ve 8 numaralı açılar dış ters

} açıların ölçüleri birbirine eşittir.

4 ve 5 numaralı açılar karşı durumlu
3 ve 6 numaralı açılar karşı durumlu

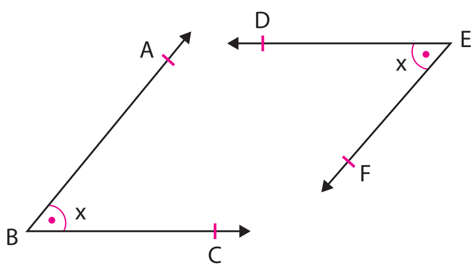
} açıların ölçüleri toplamı 180° dir.

KOLLARI PARALEL AÇILAR



[BA // [EF

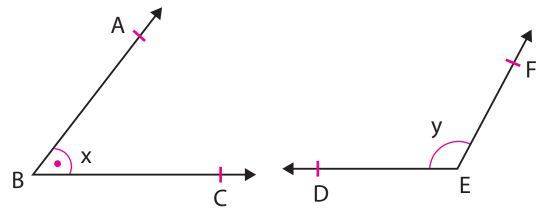
[BC // [ED



[BA // [EF

[BC // [ED

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF}) = x$

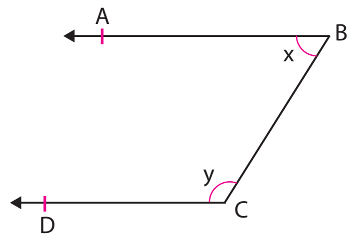


[BA // [EF

[BC // [ED, $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{DEF}) = 180°$

$x + y = 180°$

U KURALI

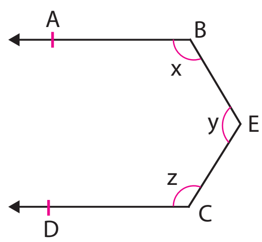


[BA // [CD ise, $x + y = 180°$

KALEM KURALI VE GÖBEK KURALI

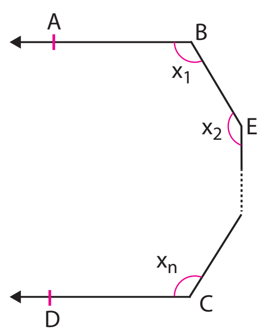
Kalem Kuralı

[BA // [CD ise, $x + y + z = 360°$

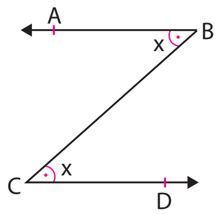


Göbek Kuralı

[BA // [CD ise, $x_1 + x_2 + ... + x_n = (n-1).180$



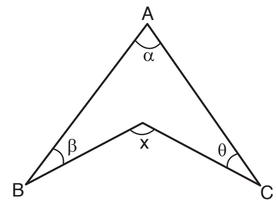
Z KURALI



[BA // [CD

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD})$

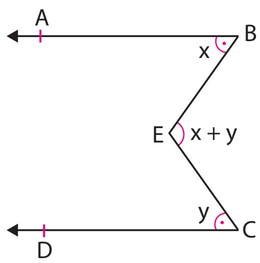
BOYNUZ (ETEK) VEYA BUMERANG KURALI



$x = \alpha + \beta + \theta$

İçerdeki açılar toplamı dışardaki açıya eşittir.

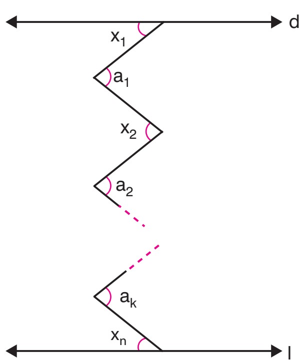
M KURALI



[BA // [CD

$m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{ECD})$

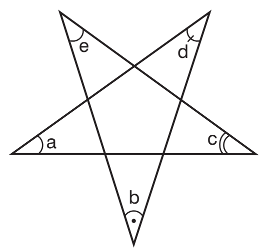
ZİKZAK KURALI



d // l ise,

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

YILDIZ KURALI

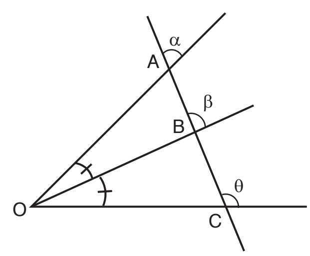


$a + b + c + d + e = 180^\circ$ dir.

n köşeli bir yıldızılda köşelerdeki

iç açılar toplamı

$(n - 4) \cdot 180^\circ$ dir.



[OB açıortay ise

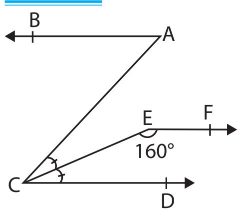
α, β , θ yöndeş açıları için

$\beta = \dfrac{\alpha + \theta}{2}$ kuralı vardır.

NAVİGASYON

- Bazen bir şekil içinde birden fazla kural uygulanması gerekebilir. Sayısal veriler hangi kuralı öncelikle kullanmamız gerektiğini gösteren ipuçlarıdır. Yani, hangi kurala ait bölümde daha fazla bilgiye sahipsek, oradan başlarız.
- Daha önce de bahsettiğimiz gibi değeri belli olmayan eşit açılar verilmiş ise, harflendirme yaparak denklemler kurulur.

ÖRNEK



[AB // [CD // [EF

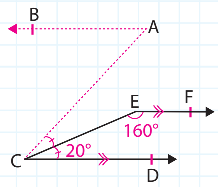
[CE] açıortay

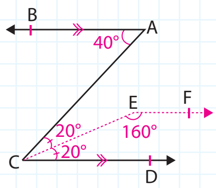
$m(\widehat{CEF}) = 160°$

olduğuna göre,

$m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

Çözüm





[EF // [CD olduğu için

U kuralını kullandığımızda

$m(\widehat{ECD}) = 180° - 160° = 20°$ olur.

Bu yüzden, $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECD}) = 20°$

ve $m(\widehat{ACD}) = 40°$ dir.

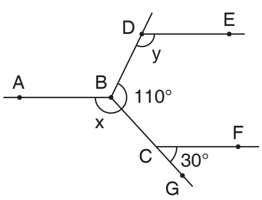
Ayrıca [AB // [CD olduğu için

Z kuralından dolayı

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACD}) = 40°$

bulunur.

ÖRNEK



[DE // [BA // CF

$m(\widehat{DBC}) = 110°$

$m(\widehat{FCG}) = 30°$

$m(\widehat{ABC}) = x$

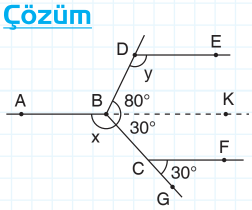
$m(\widehat{EDB}) = y$

Yukarıdaki verilere göre, x – y farkı kaç derecedir?

A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

2011/LYS

Çözüm



AB uzatılırsa

$m(\widehat{KBC}) = m(\widehat{FCG}) = 30°$

(Yöndeş açılar)

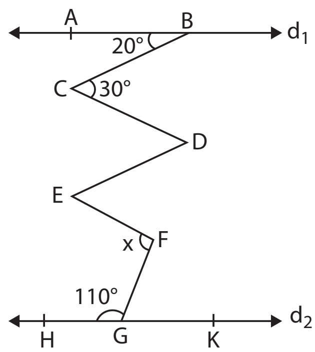
$m(\widehat{DBK}) + y = 180°$

$y = 100°$ dir.

$x + 30° = 180° \Rightarrow x = 150°$ olur.

$x - y = 150° - 100° = 50°$ bulunur. *Yanıt E*

ÖRNEK



$d_1 // d_2$

[CD] // [EF]

$m(\widehat{ABC}) = 20°$

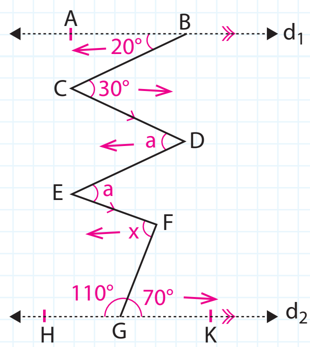
$m(\widehat{BCD}) = 30°$

$m(\widehat{FGH}) = 110°$

$m(\widehat{EFG}) = x$

Yukarıda verilenlere göre x kaç derecedir?

Çözüm



Öncelikle, [CD // [EF]

olduğu için Z kuralından

$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{DEF}) = a$

olsun diyebiliriz. Ayrıca;

$m(\widehat{KGF}) = 180° - 110°$

$= 70°$ olur.

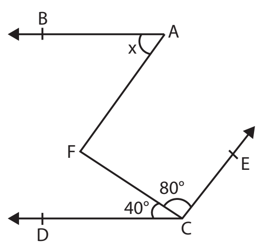
Son olarak,

$d_1 // d_2$ olduğu için,

zikzak kuralını kullanırsak,

$20° + a + x = 30° + a + 70° \Rightarrow x = 80°$ bulunur.

ÖRNEK



[AB // [CD

[CE // [AF]

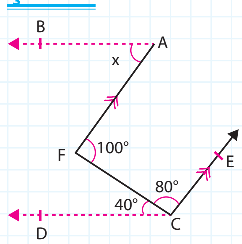
$m(\widehat{FCD}) = 40°$

$m(\widehat{ECF}) = 80°$

$m(\widehat{BAF}) = x$

Yukarıda verilenlere göre, x kaç derecedir?

Çözüm

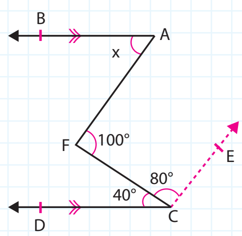


[CE // [AF] olduğu için,

U kuralından

$m(\widehat{AFC}) = 180° - 80° = 100°$

olur.



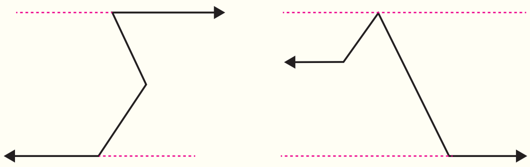
[AB // [CD olduğu için

M kuralından,

$x + 40° = 100° \Rightarrow x = 60°$

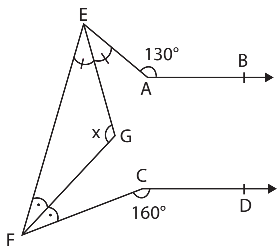
bulunur.

NAVİGASYON



Kullandığımız kurallar paralel iki doğru arasında geçerlidir. Bu yüzden, bazı şekilleri kural kullanmaya uygun hale getirmek gerekebilir. Bunu yapmak için verilen paralel çizgiler uzatılabilir, veya yeni paralel çizgiler çizilebilir.

ÖRNEK



[AB // [CD

[EG] ve [FG] açıortay

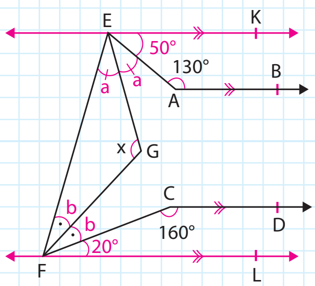
$m(\widehat{BAE}) = 130°$

$m(\widehat{DCF}) = 160°$

$m(\widehat{EGF}) = x$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

Çözüm



E ve F köşelerinden paralel doğrular çizelim.

[AB // EK olduğu için

$m(\widehat{AEK}) = 180° - 130° = 50°$ olur.

Ayrıca, [CD // FL olduğu için

$m(\widehat{CFL}) = 180° - 160° = 20°$ olur.

Şimdi, $m(\widehat{AEG}) = m(\widehat{FEG}) = a$ ve

$m(\widehat{CFG}) = m(\widehat{EFG}) = b$ olsun.

FL // EK olduğu için, U kuralını kullanırsak:

$$2a + 50° + 2b + 20° = 180°$$

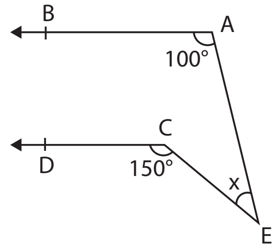
$$2a + 2b = 110°$$

$$a + b = 55° \text{ olur.}$$

Son olarak, EK ile FL arasında M kuralını kullanırsak,

$x = a + 50° + b + 20° = \underbrace{a + b}_{55°} + 70 = 125°$ *buluruz.*

ÖRNEK



[AB // [CD

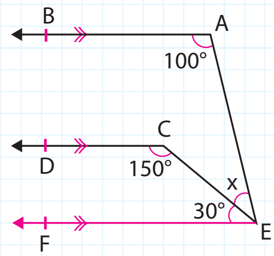
$m(\widehat{BAE}) = 100°$

$m(\widehat{DCE}) = 150°$

$m(\widehat{AEC}) = x$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

Çözüm



[EF // [AB // [CD olacak şekilde [EF ışınını çizelim.

[CD // [EF olduğu için,

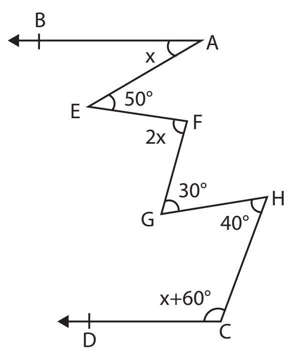
$m(\widehat{CEF}) = 180° - 150° = 30°$

olur.

[AB // [EF olduğu için ise,

$x + 30° + 100° = 180° \Rightarrow x = 50°$ bulunur.

ÖRNEK



[AB // [CD

$m(\widehat{EFG}) = 2\,m(\widehat{BAE}) = 2x$

$m(\widehat{DCH}) = x + 60°$

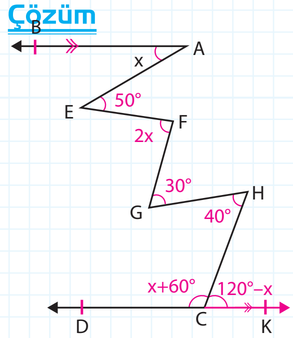
$m(\widehat{AEF}) = 50°$

$m(\widehat{CHG}) = 40°$

$m(\widehat{FGH}) = 30°$

Yukarıda verilenlere göre, x kaç derecedir?

Çözüm



[CD ışınını uzatalım.

$m(\widehat{HCK}) + x + 60° = 180°$

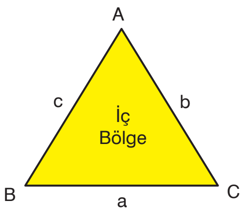
$m(\widehat{HCK}) = 120° - x$ olur.

Zik zak kuralını kullanırsak,

$$x + 2x + 40° = 50° + 30° + 120° - x$$

$$4x = 160°$$

$$x = 40° \text{ bulunur.}$$

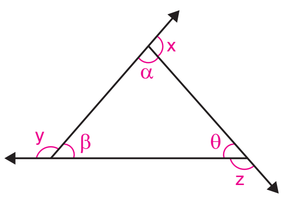


Üç doğru parçası birleştirilerek elde edilen kapalı şekle üçgen denir. Yandaki şekil, ABC üçgeni (veya $\widehat{ABC}$) olarak ifade edilir.

($\widehat{ABC}$) gösterimi ABC üçgensel bölgesini ifade eder. Yani, üçgeni oluşturan doğru parçaları ile iç bölgesinin birleşimini bir küme olarak gösterir.

- A, B ve C üçgenin köşeleridir.
- [AB], [AC] ve [BC] üçgenin kenarlarıdır.
- |BC|=a birim, |AC|=b birim ve |AB|=c birim üçgenin kenar uzunluklarıdır.

Konu Anlatımı

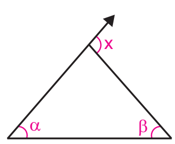


- α, β ve θ üçgenin iç açılarının ölçüleridir. Toplamları 180° ye eşittir.

  $\alpha + \beta + \theta = 180°$

- x, y ve z üçgenin dış açılarının ölçüleridir. Toplamları 360° ye eşittir.

  $x + y + z = 360°$



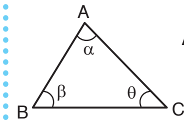
- İki iç açının toplamı, üçüncü köşedeki dış açıya eşittir.

  $x = \alpha + \beta$

ÜÇGEN ÇEŞİTLERİ

AÇILARINA GÖRE

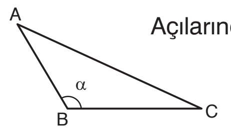
Dar Açılı Üçgen



Açılarının herbiri dar açı olan üçgendir.

$\alpha < 90°$, $\beta < 90°$, $\theta < 90°$

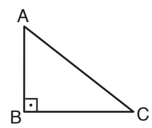
Geniş Açılı Üçgen



Açılarından biri geniş açı olan üçgendir.

$90° < \alpha < 180°$

Dik Üçgen

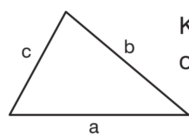


Bir açısı 90° olan üçgendir. 90° nin karşısındaki kenar "hipotenüs"; diğer kenarlar ise, "dik kenarlar" olarak isimlendirilir.

[AC] hipotenüs, [AB] ve [BC] dik kenarlar

KENARLARINA GÖRE

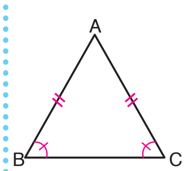
Çeşitkenar Üçgen



Kenar uzunlukları birbirinden farklı olan üçgendir.

$a \neq b,\ b \neq c,\ a \neq c$

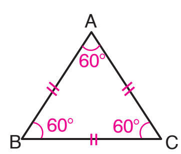
İkizkenar Üçgen



İki kenarı eşit olan üçgendir. Eşit olan kenarlara "ikiz kenarlar", üçüncü kenara ise, "taban" denir. Kenarların eşitliğini ikisine de aynı işaretlemeyi yaparak gösteririz. Eşit kenarlara bakan açılar da eşittir.

$|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$

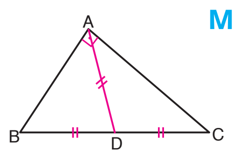
Eşkenar Üçgen



Üç kenarı da eşit olan üçgene denir. Açılarının herbiri 60° dir.

$|AB| = |AC| = |BC| \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$

Muhteşem Üçlü

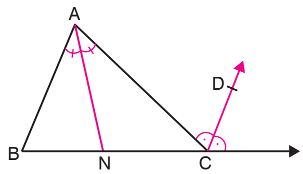


Dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu, ayırdığı parçaların uzunluğuna eşittir.

$m(\widehat{BAC}) = 90° \Leftrightarrow |AD| = |BD| = |CD|$

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

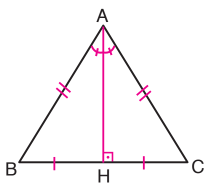
AÇIORTAY



- [AN] : A köşesine ait iç açıortay (n_A)
- [CD : C köşesine ait dış açıortay ($n_{C'}$)

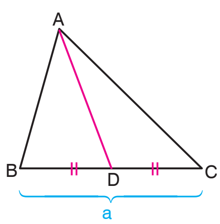
Üçgende iki farklı açı türü olduğu için iki farklı açıortay türü vardır.

Açıortayı göstermek için n harfi kullanılır.



İkiz kenar (veya eşkenar) üçgenin tepe köşesinden çizilen kenarortay, açıortay ve yükseklik çakışık olur. Aynı zamanda üçgeni simetrik iki parçaya ayırır.

KENARORTAY

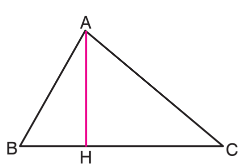


Üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenarın orta noktasına çizilen doğru parçasına **kenarortay** denir.

Kenarortayı göstermek için V harfi kullanılır.

[AD] : [BC] kenarına ait kenarortay (V_a)

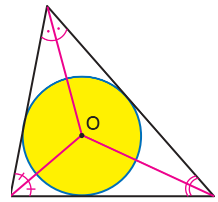
YÜKSEKLİK



Üçgenin bir köşesinden karşısındaki kenara dik olarak inen doğru parçasına yükseklik denir. Yüksekliği göstermek için h harfi kullanılır.

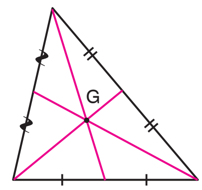
[AH]: [BC] kenarına ait yükseklik (h_a)

ÜÇGENİN MERKEZLERİ



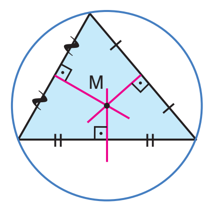
Üçgenin iç açıortaylarının kesiştiği nokta üçgenin **iç teğet çemberinin merkezidir.** Her üçgenin bir tane iç teğet çemberi vardır.

O iç teğet çemberinin merkezi



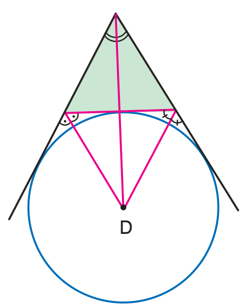
Üçgenin kenarortaylarının kesiştiği nokta, üçgenin **ağırlık merkezidir**. Diğer bir deyişle, üçgensel bölgenin denge merkezidir.

G Ağırlık merkezi



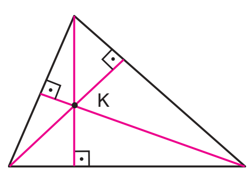
Bir üçgenin kenar-orta dikmelerinin kesiştiği nokta üçgenin **çevrel çemberinin merkezidir.** Dar açılı üçgende üçgenin iç bölgesinde, geniş açılı üçgende üçgenin dış bölgesinde, dik üçgende ise, hipotenüsün ortasında olur.

M çevrel çemberin merkezi



Üçgenin iki dış açıortayı ile bir iç açıortayının kesiştiği nokta, üçgenin **dış teğet çemberinin merkezidir.** Her üçgenin üç tane dış teğet çemberi vardır.

D dış teğet çemberin merkezi



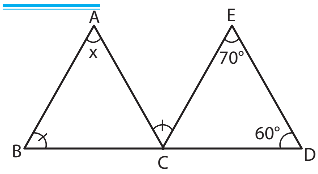
K diklik merkezi

Üçgenin yüksekliklerinin kesiştiği nokta **diklik merkezidir.** Diklik merkezinin konumu üçgen çeşidine göre değişir. Dar açılı üçgende iç bölgede, geniş açılı üçgende dış bölgede ve dik üçgende 90°lık açının köşesindedir.

NAVİGASYON

- Bir üçgenin herhangi iki köşesindeki açı ölçüleri biliniyor ise, öncelikle üçüncü köşedeki açı bulunur.
- Köşelerdeki açıların ölçüleri verilmemiş olsa da üç köşeyi harflendirmelerle doldurduğumuzda, denklem veya denklemler kurarak sonuca ulaşırız.
- Birden fazla üçgen olduğunda en fazla bilgi sahibi olduğumuz üçgenden başlarız.

ÖRNEK



$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ACE})$

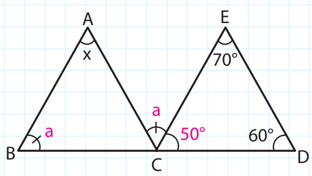
$m(\widehat{BDE}) = 60°$

$m(\widehat{CED}) = 70°$

$m(\widehat{BAC}) = x$

Yukarıda verilenlere göre, x kaç derecedir?

Çözüm



ECD üçgeninde iç açıları topladığımızda

$m(\widehat{ECD}) + 60° + 70° = 180°$

$m(\widehat{ECD}) = 50°$ olur.

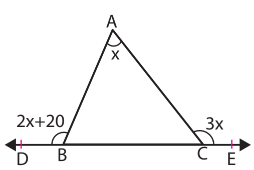
Şimdi, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACE}) = a$ diyelim.

ABC üçgeninde "iki iç açının toplamı bir dış açıya eşittir."

özelliğini kullanırsak;

$x + a = a + 50° \Rightarrow x = 50°$ buluruz.

ÖRNEK



D, B, C, E noktaları doğrusal

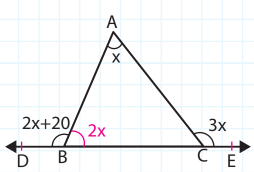
$m(\widehat{BAC}) = x$

$m(\widehat{ABD}) = 2x + 20°$

$m(\widehat{ACE}) = 3x$

Yukarıda verilenlere göre, x kaç derecedir?

Çözüm



ABC üçgeninde

$m(\widehat{ABC}) + x = 3x$

$m(\widehat{ABC}) = 2x$ olur.

D, B ve C doğrusal olduğu için,

$2x + 20° + 2x = 180° \Rightarrow x = 40°$ bulunur.

ÖRNEK

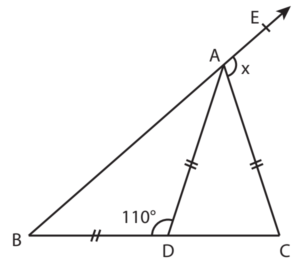
ABC bir üçgen

$A \in [BE$

$|BD| = |DA| = |AC|$

$m(\widehat{BDA}) = 110°$

$m(\widehat{EAC}) = x$



Yukarıda verilenlere göre, x kaç derecedir?

A) 105 B) 110 C) 115 D) 120 E) 125

2014 / LYS

Çözüm

$|DA| = |DB|$ ise

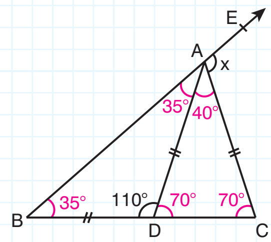
$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAD}) = \alpha$ dır.

ABD üçgeninde

$180° = 2\alpha + 110°$ ve $a = 35°$ olur.

$m(\widehat{BDA}) = 110°$ ise

$m(\widehat{ADC}) = 180° - 110° = 70°$



$|AD| = |AC|$ ise $m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACD}) = 70°$

ABC üçgeninde EAC dış açısı kendisine komşu olmayan

$m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ toplam kadarıdır.

$x = 35 + 70 = 105°$ m bulunur.

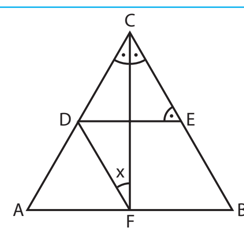
ÖRNEK

ABC bir üçgen

AFD eşkenar üçgen

[DE] // [AB]

$m(\widehat{DFC}) = x$



Yukarıdaki şekilde $m(\widehat{ACF}) = m(\widehat{FCB}) = m(\widehat{DEC})$ ve D, E, F noktaları ABC üçgenininin kenarları üzerindedir.

Buna göre, x kaç derecedir?

A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

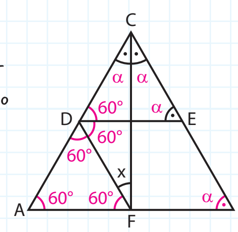
2017 / LYS

Çözüm

[DE] // [AB] olduğundan

$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{A}) = 60°$ ve

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{CED}) = \alpha$ yöndeş açılar



$\widehat{ABC}$'den $60° + 3\alpha = 180°$ (iç açılar)

$3\alpha = 120°$ ise $\alpha = 40°$ olur.

$\widehat{BCF}$'de $m(\widehat{AFC}) = m(\widehat{B}) + M(\widehat{BCF})$

$60° + x = \alpha + \alpha$

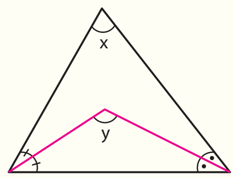
$60° + x = 80° \Rightarrow x = 20°$ bulunur.

Yanıt A

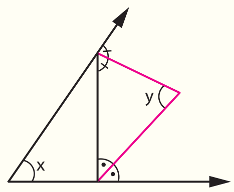
NAVİGASYON

- Bir üçgenin iki köşesinden açıortay çizildiğinde kesişim noktasındaki açıyı bulmak için özel formüller vardır. Fakat, ilgili soruları formül kullanmadan da çözebiliriz.

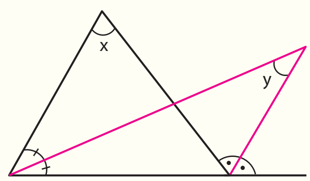
- $y = 90° + \frac{x}{2}$



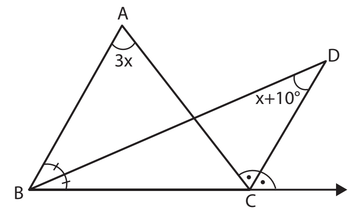
- $y = 90° - \frac{x}{2}$



- $y = \frac{x}{2}$



ÖRNEK



ABC bir üçgen

[BD] iç açıortay

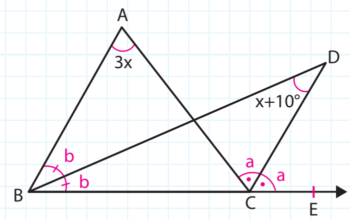
[CD] dış açıortay

$m(\widehat{BAC}) = 3x$

$m(\widehat{BDC}) = x + 10°$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

Çözüm



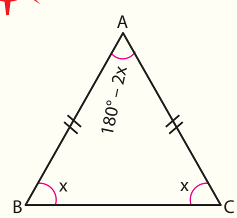
$x + 10° = \frac{3x}{2}$

$2x + 20° = 3x$

$x = 20°$

bulunur.

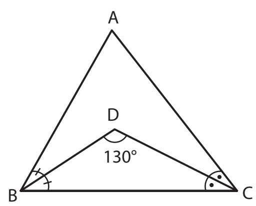
NAVİGASYON



İkizkenar üçgenin taban açıları birbirine eşit olduğu için herhangi bir açısını biliyorsak diğer açılarını bulabiliriz.

Eğer ölçüsü belli olan bir açısı yoksa, şekildeki gibi taban açılarına harf vererek denklem kurarız.

ÖRNEK



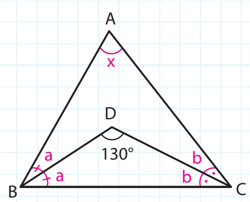
ABC bir üçgen

[BD] ve [CD] açıortay

$m(\widehat{BDC}) = 130°$

Yukarıda verilenlere göre, $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

Çözüm



I. Yol (Formül)

$130° = 90° + \frac{x}{2} \Rightarrow$

$40° = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 80°$ olur.

II. Yol (Açıları harflendirerek)

Önce $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CBD}) = a$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCD}) = b$ diyelim.

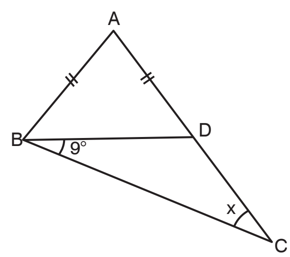
Şimdi DBC üçgeninde iç açıları toplarsak,

$130° + a + b = 180° \Rightarrow a + b = 50°$ olur.

Bu yüzden, ABC üçgeninde iç açıları toplarsak,

$x + \underbrace{2a + 2b}_{100} = 180° \Rightarrow x + 100° = 180° \Rightarrow x = 80°$ olur.

ÖRNEK



ABC bir ikizkenar üçgen

$|AB| = |AD|$

$m(\widehat{DBC}) = 9°$

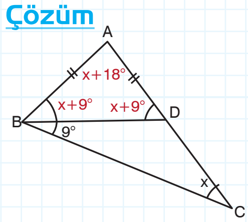
$m(\widehat{BCD}) = x$

Yukarıdaki şekilde $|AC| = |BC|$ olduğuna göre x kaç derecedir?

A) 36 B) 39 C) 48 D) 51 E) 54

2010/ LYS

Çözüm



BDC üçgeninde $m(\widehat{BDA}) = x + 9°$

(dış açı kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşittir.)

$|AB| = |AD|$ olduğundan

$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ABD}) = x + 9°$ dır.

$|AC| = |BC|$ olduğundan

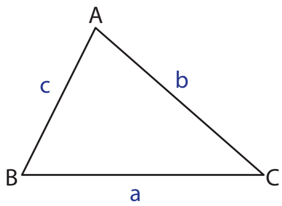
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ABC}) = x + 9 + 9 = x + 18°$

ABD üçgeninde iç açılar toplamı

$(x+18°)+(x+9°)+(x+9°) = 180°$ ve $3x = 144 \Rightarrow x = 48°$

bulunur. Yanıt C

Konu Anlatımı

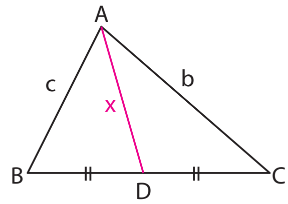


$|b - c| < a < b + c$

$|a - c| < b < a + c$

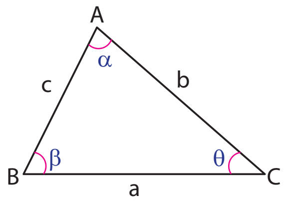
$|a - b| < c < a + b$

Bir üçgenin kenar uzunlukları rastgele değerler alamaz. Herhangi bir kenarın uzunluğu daima, diğer iki kenarın uzunlukları toplamı ile farkı arasındadır.



$$\frac{|b - c|}{2} < x < \frac{b + c}{2}$$

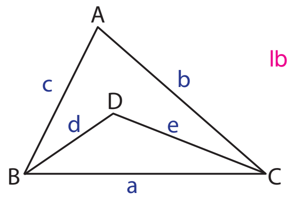
Bir üçgenin bir kenarına ait kenarortayının uzunluğu diğer iki kenarın uzunlukları toplamının yarısı ile farkının yarısı arasındadır.



Bir üçgenin açı ölçüleri arasında sıralama yapabiliyorsak, kenar uzunlukları arasında da sıralama yapabiliriz.

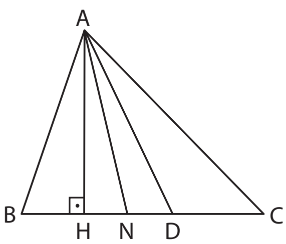
$\alpha > \beta > \theta \iff a > b > c$

Yani, ölçüsü büyük olan açının karşısındaki kenar uzun, ölçüsü küçük olan açının karşısındaki kenar ise kısa olur.



$|b - c| < a < d + e < b + c$

Bir kenarı ortak olan iki üçgenden biri diğerinin iç bölgesinde ise, ortak olmayan kenarlar için verilen eşitsizlik geçerlidir. Eğer a değeri verilmemişse, eşitsizlikte de ihmal edilir.



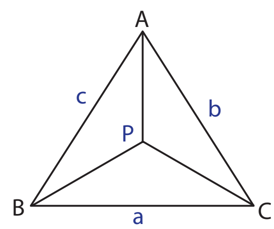
[AH] yükseklik (h_a)

[AN] açıortay (n_A)

[AD] kenarortay (V_a)

$V_a \geq n_A \geq h_a$

Üçgenin bir köşesinden çizilen yardımcı elemanları karşılaştırdığımızda en kısası yükseklik olur. En uzunu ise, kenarortaydır. Sadece, ikizkenar ve eşkenar üçgende, yardımcı elemanlar birbirlerine eşit olabilirler.

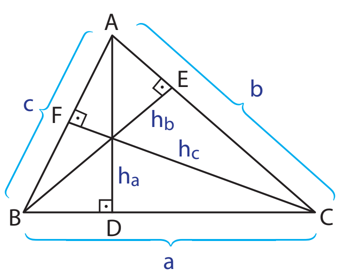


P noktası A, B, C üçgensel bölgesinin içinde olmak üzere, ABC üçgeninin kenar uzunlukları olan a, b ve c değerleri teker teker verilmişse,

$$\frac{a + b + c}{2} < |PA| + |PB| + |PC| < a + b + c \text{ ve}$$

Eğer a, b, c uzunlukları belli ise

$|PA| + |PB| + |PC|$ toplamı a, b, c uzunluklarından en uzun ikisinin toplam uzunluğundan kısadır.



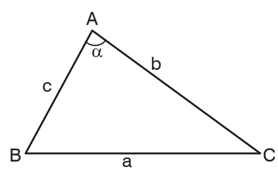
a > b > c ise,

$h_a < h_b < h_c$

$n_A < n_B < n_C$

$V_a < V_b < V_c$

Bir üçgenin kenar uzunlukları arasındaki sıralama ile yardımcı elemanların uzunlukları arasındaki sıralama terstir. Yani, uzun kenarın yüksekliği, açıortayı ve kenar ortayı kısadır. Kısa kenarın ise, yüksekliği, açıortayı ve kenarortayı uzundur.



$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olmak üzere;

$\alpha = 90°$ ise $a^2 = b^2 + c^2$,

$\alpha < 90°$ ise $a^2 < b^2 + c^2$,

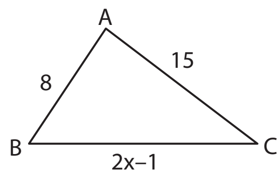
$\alpha > 90°$ ise $a^2 > b^2 + c^2$, dir.

a, b, c kenarları arasında üçgen eşitsizliği gerçekleştirildikten sonra ilave olarak yukarıdaki ilgili sonuçla kesişim kümesi alınır.

NAVİGASYON

- Üçgen eşitsizliği her üçgen için ayrı ayrı geçerlidir. Bu yüzden bir soruda birden fazla üçgen varsa çıkan eşitsizliklerden ortak bir sonuç bulunabilir. Bazen de bir eşitsizlikten elde edilen bilgi diğerinde kullanılarak sonuca ulaşılabilir.
- Sonuca ulaşmak için ara işlemleri yaparken, tam sayı olma şartına dikkat etmek gereklidir. Yani, eğer bir uzunluk için tam sayı olma şartı konulmamışsa, tüm reel sayı ihtimallerine göre çözüm üretmeliyiz.

ÖRNEK



ABC bir üçgen

$|AB| = 8$ birim

$|AC| = 15$ birim

$|BC| = 2x - 1$ birim

Yukarıda verilenlere göre, x in kaç farklı tam sayı değeri vardır?

Çözüm

Üçgen eşitsizliğini yazarsak

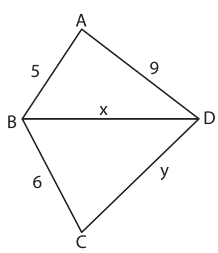
$|15 - 8| < 2x - 1 < 15 + 8 \Rightarrow 7 < 2x - 1 < 23$

$\Rightarrow 8 < 2x < 24 \Rightarrow 4 < x < 12$ *değer aralığını bulunuz.*

Dolayısıyla, x in tam sayı değerleri 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 olur.

Yani 7 farklı tam sayı değeri vardır.

ÖRNEK



ABCD bir dörtgen

$|AB| = 5$ cm

$|AD| = 9$ cm

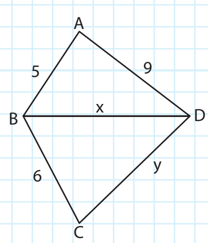
$|BC| = 6$ cm

$|BD| = x$ cm

$|CD| = y$ cm

Yukarıdaki verilere göre, x in en büyük tam sayı değeri için y nin en küçük tam sayı değeri kaçtır?

Çözüm



ABD üçgeninde üçgen eşitsizliğini kullanırsak;

$|9 - 5| < x < 9 + 5 \Rightarrow 4 < x < 14$ *olur.*

Sorudaki yönlendirmeden dolayı (x in en büyük tam sayı değeri için) x = 13 seçerek BCD üçgenine geçelim.

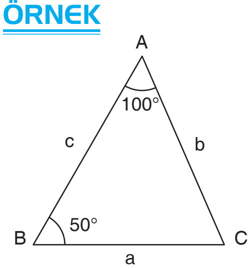
$|13 - 6| < y < 13 + 6 \Rightarrow 7 < y < 19$ *olur.*

Dolayısıyla, y nin en küçük tam sayı değeri 8 dir.

NAVİGASYON

- Açı ölçülerine göre kenarları karşılaştırmamız gereken sorularda öncelikle, mümkün olduğunca fazla açı değeri bulmaya çalışırız. Daha sonra, kenarları sıralamaya başlarız.
- Bazen, açıların ölçüleri verilmeden aralarındaki büyüklük ilişkisi verilebilir. Ya da dolaylı olarak açılardan hangisinin büyük olduğunu bulmamız gerekebilir.
- Eğer birden fazla üçgen varsa, her birini ayrı ayrı inceleyip, sonra ortak bir sonuca ulaşırız.

ÖRNEK



ABC bir üçgen

$m(\widehat{ABC}) = 50°$

$m(\widehat{CAB}) = 100°$

Yukarıdaki verilere göre,

$$\frac{|a-b|+|b-c|+|c-a|}{2}$$

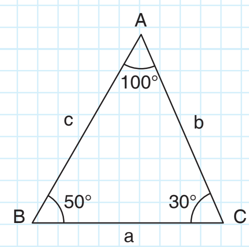
ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $a - c$ B) $a - b$ C) $b - c$

D) $b - a$ E) $c - b$

2010/ YGS

Çözüm



100 > 50 > 30 olduğundan

a > b > c dir.

$|a - b| = a - b,$

$|b - c| = b - c$ *ve*

$|c - a| = a - c$ *ise*

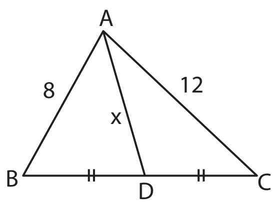
$\dfrac{a - b + b - c + a - c}{2} = a - c$ *bulunur.*

Yanıt A

NAVİGASYON

- Bir üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından çizilen bir doğru parçasının uzunluğuyla ilgili yorum yapmamız bekleniyorsa, orta taban çizeriz. Bu sayede net yorum yapabileceğimiz bir üçgen elde ederiz.
- Bazen bir kenarın üzerindeki konumu tam verilmeyen bir noktadan çizilen bir doğru parçasının uzunluğuyla ilgili yorum yapmamız istenebilir. Bu durumda, noktanın kenar üzerindeki farklı konumlarını yorumlayarak, değer aralığını buluruz.

ÖRNEK



ABC bir üçgen

IBDI = ICDI

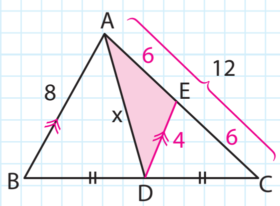
IABI = 8 cm

IACI = 12 cm

IADI = x cm

Yukarıda verilenlere göre, x in tam sayı değerleri kaç tanedir?

Çözüm



[AB] kenarına paralel olan [DE] nı çizelim. [DE] orta taban olduğu için

$$|DE| = \frac{|AB|}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$

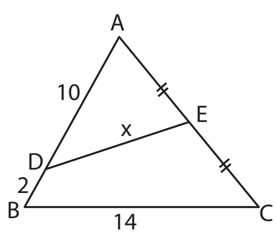
ve $|AE| = |EC| = \frac{|AC|}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$ olur.

ADE üçgeninde üçgen eşitsizliğini kullanırsak;

$|6 - 4| < x < 6 + 4 \Rightarrow 2 < x < 10$ olur.

Dolayısıyla, x in tam sayı değerleri 7 tanedir.

ÖRNEK



ABC bir üçgen

IAEI = ICEI

IADI = 10 cm

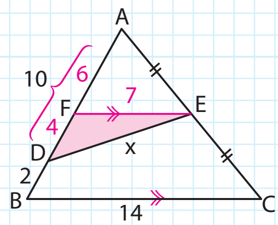
IBDI = 2 cm

IBCI = 14 cm

IDEI = x cm

Yukarıda verilenlere göre, x yerine kaç farklı tam sayı değeri yazılabilir?

Çözüm



[EF] // [BC] çizelim.

[EF] orta taban olduğu için,

IEFI = 7 cm,

IAFI = IBFI = 6 cm

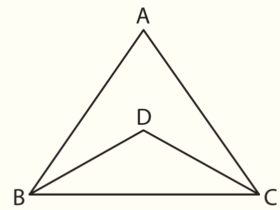
ve IDFI = 4 cm olur.

Bu nedenle, DEF üçgeninde üçgen eşitsizliği kullanırsak

$|7 - 4| < x < 7 + 4 \Rightarrow 3 < x < 11$ olur.

Dolayısıyla, x yerine 7 tane tam sayı değeri yazılabilir.

NAVİGASYON

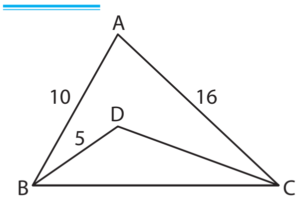


D noktası ABC üçgensel bölgesinin içinde olduğu için IBDI + ICDI toplamı

IABI + IACI toplamından küçük olur. Fakat, IBDI < IABI veya ICDI < IACI olmak zorunda değildir. Ayrıca, üçgenlerde ayrı ayrı eşitsizlik bulmak gereken durumlar da olabilir.

|IABI – IACI| < IBCI< IBDI + ICDI < IABI + IACI

ÖRNEK



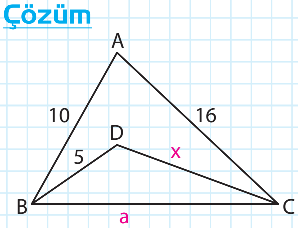
IABI = 10 cm

IACI = 16 cm

IBDI = 5 cm

Yukarıdaki şekilde, <u>bütün uzunluklar birer tam sayıdır</u>. D noktası ABC üçgeninin iç bölgesinde olduğuna göre, ICDI uzunluğunun en küçük ve en büyük değerleri toplamı kaç cm dir?

Çözüm



IBCI = a cm ve ICDI = x cm diyelim.

Öncelikle, ABC üçgeninde üçgen eşitsizliğini yazarsak $6 < a < 26$ *olur.*

Bütün uzunlukların tam sayı olma zorunluluğundan dolayı, a nın değerleri 7, 8, . . . , 25 olabilir.

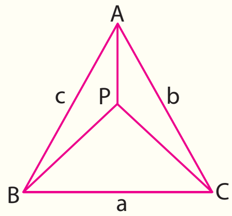
İkinci olarak, yukarıdaki kuralı kullanırsak $a < x+5 < 26$ *olur.*

$x + 5 < 26$ *olduğu için, x in en büyük tam sayı değeri 20 dir.*

Ayrıca, a = 7 alırsak, $7 < x+5$ *olduğu için, x in en küçük tam sayı değeri 3 olur.*

Dolayısıyla, ICDI uzunluğunun en küçük ve en büyük değerleri toplamı 3 cm + 20 cm = 23 cm bulunur.

NAVİGASYON

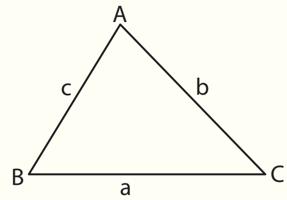


1. $\dfrac{Ç(ABC)}{2} < |PA| + |PB| + |PC| < Ç(ABC)$

2. $\dfrac{a+b+c}{2} < |PA| + |PB| + |PC| < \max(a+b, a+c, b+c)$

P noktasını ABC üçgensel bölgesinin içinde hareket ettirdiğimizde |PA|, |PB| ve |PC| uzunlukları birbirleriyle ve ABC üçgeninin kenarlarıyla bağlantılı olarak değişir. Bu yüzden, |PA| + |PB| + |PC| toplamı daima ABC üçgeninin çevresinin yarısından büyüktür. Aynı zamanda, ABC üçgeninin çevresinden de küçüktür. Fakat, <u>üçgenin kenar uzunlukları ayrı ayrı biliniyor ise, sadece en büyük iki kenarın toplamından küçüktür.</u>

NAVİGASYON



1. $V_a > n_A > h_a$

   $V_b > n_B > h_b$

   $V_c > n_C > h_c$

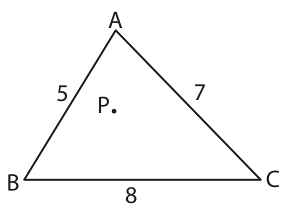
2. $a > b > c \Rightarrow V_a < V_b < V_c$

   $n_A < n_B < n_C$

   $h_a < h_b < h_c$

Bir üçgenin bir köşesinden çizilen yardımcı elemanlar arasında karşılaştırma yapmak gerekiyorsa, 1. kural yeterlidir. Fakat farklı köşelerden çizilen yardımcı elemanlar arasında karşılaştırma yapmamız isteniyorsa, 2. kuralı kullanırız. Bazı sorularda, 2 kuralı birleştirerek çözüm yapabiliriz.

ÖRNEK



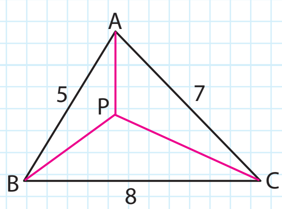
|AB| = 5 cm

|AC| = 7 cm

|BC| = 8 cm

Yukarıdaki verilere göre, P noktasının üçgenin köşelerine uzaklıkları toplamının alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerleri toplamı kaç cm olur?

Çözüm



Öncelikle, P noktasını üçgenin köşelerine birleştiren doğru parçalarını çizelim. Sonra, üçgenin kenar uzunlukları verildiği için 2. duruma göre eşitsizlik kuralım.

$\dfrac{5+7+8}{2} < |PA| + |PB| + |PC| < \max(5+7, 7+8, 5+8)$

(En uzun iki kenarın toplamı 7 + 8 = 15)

$\Rightarrow 10 < |PA| + |PB| + |PC| < 15$ *olur.*

Dolayısıyla, toplamın alabileceği en büyük tam sayı değeri 14 ve en küçük tam sayı değeri 11 olabilir.

Sonuç 14 + 11 = 25 tir.

ÖRNEK

Bir ABC üçgeninin A köşesinden çizilen yükseklik 6 birim ve kenarortay 10 birim uzunluğundadır.

Buna göre, A köşesinden çizilen iç açıortayın uzunluğu birim cinsinden kaç farklı tam sayı değeri alabilir?

Çözüm

$V_a = 10$ birim ve $h_a = 6$ birim verilmiş.

1. kuralı kullanırsak $6 < n_A < 10$ olur.

Dolayısıyla, üç tam sayı değeri alabilir.

ÖRNEK

Bir çeşitkenar ABC üçgeninde $h_a > n_B > V_c$ olduğuna göre, üçgenin kenar uzunlukları a, b ve c arasındaki sıralama nedir?

Çözüm

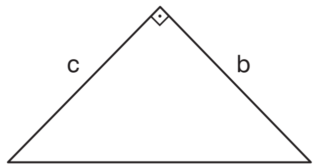
Navigasyondaki 1. kuraldan dolayı $n_A > h_a$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca soruda $h_a > n_B$ verildiği için, $n_A > n_B$ olur. Yine 1. kuraldan dolayı $V_c > n_C$ olduğunu biliyoruz. Soruda verilen $n_B > V_c$ eşitsizliğiyle birleştirdiğimizde, $n_B > n_C$ olur.

Dolayısıyla, $h_a > n_B > V_C$ eşitsizliği $n_A > n_B > n_C$ eşitsizliğine dönüşür. Sonuç olarak yardımcı elemanlar ile, kenarlar arasındaki sıralama ters olduğu için $a < b < c$ dir.

Konu Anlatımı

Konu Anlatımı

PİSAGOR BAĞINTISI

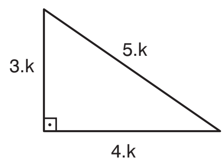


$a^2 = b^2 + c^2$

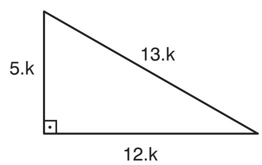
Bir dik üçgende hipotenüs uzunluğunun karesi, dik kenar uzunluklarının kareleri toplamına eşittitir. Bu bağıntı Pisagor (Pythagoras) tarafından bulunmuştur.

KENARLARINA GÖRE ÖZEL ÜÇGENLER

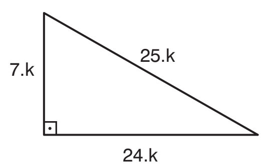
1. 3 - 4 - 5 üçgeni



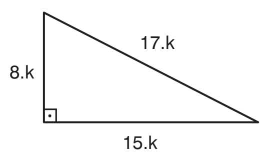
2. 5 - 12 - 13 üçgeni



3. 7 - 24 - 25 üçgeni

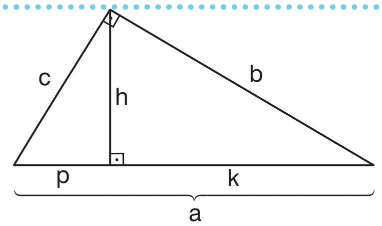


4. 8 - 15 - 17 üçgeni



- Bu kenar uzunluklarının özelliği Pisagor bağıntısını sağlamalarıdır.
- Bu sayıların katları da bu listeye dahildir.
- Kenarları tamsayı olan başka özel üçgenler de vardır. Ama, en çok karşılaşılanlar bunlardır.

ÖKLİD BAĞINTISI

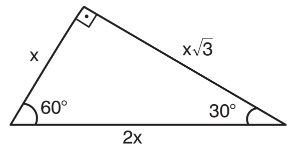


1. $h^2 = p \,.\, k$
2. $b^2 = k \,.\, (p + k) = k \,.\, a$
   $c^2 = p \,.\, (p+k) = p \,.\, a$
3. $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$
4. $b \,.\, c = a \,.\, h$

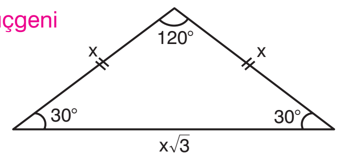
Sadece dik açının köşesinden hipotenüse dikme çizildiğinde kullanılır. Öklid (Euclid) tarafından bulunduğu için onun adıyla anılır. Buradaki 3. bağıntıyı kullanmak yerine a.h=b.c eşitliğini kullanabiliriz. Bu eşitlik üçgenin alan formülünden elde edilmiştir.

ÖZEL AÇILI ÜÇGENLER

1. 30° - 60° - 90° üçgeni

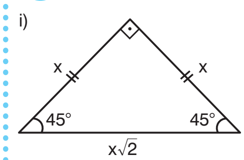


2. 120° - 30° - 30° üçgeni

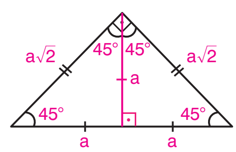


3. 45° - 45° - 90° üçgeni (İkizkenar Dik Üçgen)

i)

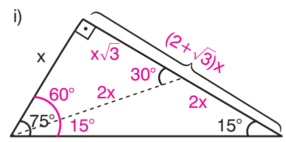


ii)

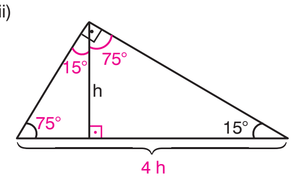


4. 15° - 75° - 90° üçgeni

i)

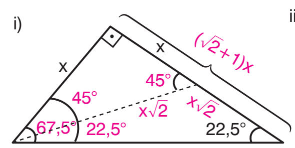


ii)

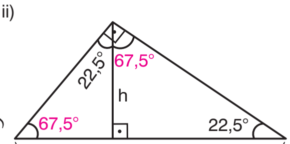


5. 22,5° - 67,5° - 90° üçgeni

i)



ii)

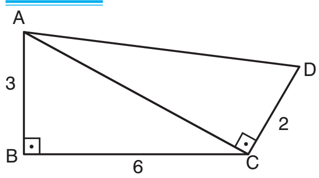


Bu açılara sahip üçgenlerde kenar uzunluklarını verilen oranları kullanarak kolayca bulabiliriz. Ya da, gerektiğinde kenar uzunluklarını kurala göre harflendirebiliriz. En önemlileri 30° - 60° - 90° ve 45° - 45° - 90° üçgenleridir.

NAVİGASYON

- Bir dik üçgenin herhangi iki kenarını biliyorsak üçüncü kenarını Pisagor bağıntısıyla bulabiliriz.
- Dik üçgendeki en temel uzunluk işlemi Pisagor bağıntısıdır. Bu yüzden şekilde birden fazla dik üçgen varsa hepsinde ayrı ayrı kullanmanız gerekebilir.
- Bazen şekilde bilinen uzunluk sayısı az olabilir. Bu durumda, uzunlukları harflendirip Pisagor bağıntısını kullanarak denklem veya denklemler elde ederiz. Daha sonra, bu denklem veya denklemleri kullanarak çözüm yaparız.
- Uygun verileri yakaladığımızda, kenarlarına göre özel üçgenleri kullanarak, soruları daha hızlı ve kolay çözebiliriz.

ÖRNEK



$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD}) = 90°$

$|AB| = 3$ cm

$|BC| = 6$ cm

$|CD| = 2$ cm

Yukarıda verilenlere göre, |AD| kaç cm dir?

Çözüm

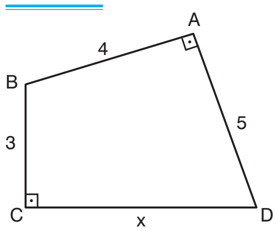
Öncelikle, ABC üçgeninde Pisagor bağıntısından;

$|AC|^2 = 3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45 \Rightarrow |AC| = 3\sqrt{5}$ *cm olur.*

Dolayısıyla, ACD üçgeninde Pisagor bağıntısını kullanırsak,

$|AD|^2 = (3\sqrt{5})^2 + 2^2 = 45 + 4 = 49 \Rightarrow |AD| = 7$ *cm buluruz.*

ÖRNEK



$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 90°$

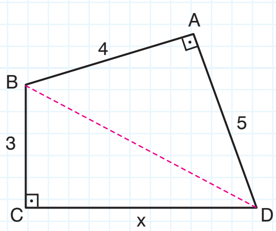
$|BC| = 3$ br

$|AB| = 4$br

$|AD| = 5$ br

Yukarıda verilenlere göre, |CD|=x kaç br dir?

Çözüm



Önce, [BD]'nı çizelim.

ABD dik üçgeninde

$|BD|^2 = 4^2 + 5^2$

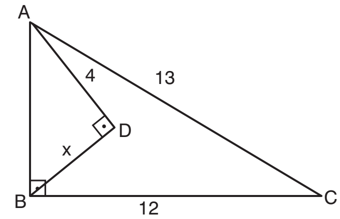
$|BD|^2 = 16 + 25 = 41$

$|BD| = \sqrt{41}$ *br olur.*

BCD dik üçgeninde ise, $(\sqrt{41})^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 41 = 9 + x^2$

$\Rightarrow x^2 = 32 \Rightarrow |CD| = x = 4\sqrt{2}$ *br bulunur.*

ÖRNEK



$[AB] \perp [BC]$

$[AD] \perp [BD]$

$|AC| = 13$ cm

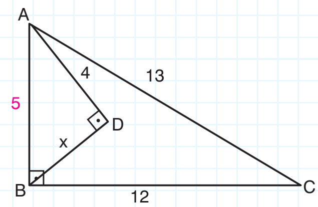
$|BC| = 12$ cm

$|AD| = 4$ cm

$|BD| = x$

Yukarıda verilenlere göre, x kaç cm dir?

Çözüm



ABC dik üçgeni

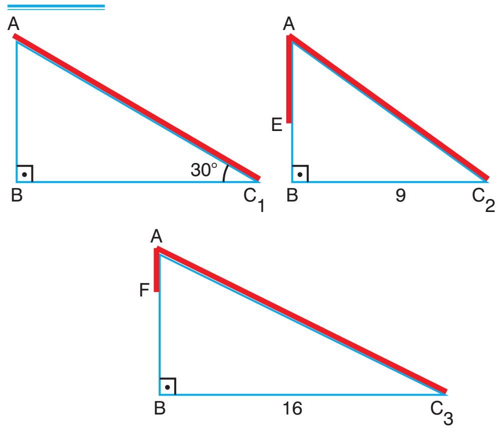
5 – 12 – 13 özel üçgenidir.

ABD dik üçgeni ise,

3 – 4 – 5 özel üçgenidir.

Dolayısıyla x = 3 cm dir.

ÖRNEK



Şekillerdeki üçgenlerin tümü için |AB| uzunlukları eşit.

Koyu çizilmiş tüm çizgiler eşit uzunlukta, |EB| = 3, $|BC_2|$ = 9 ve $|BC_3|$ = 16 olduğuna göre |FB| kaçtır?

Çözüm

ABC_1 üçgeninde |AB| = a dersek $|AC_1|$ = 2a olur.

ABC_2 üçgeninde |AB| = a ise |AE| = a – 3 ve

$|AC_2|$ = 2a – (a – 3) = a + 3 olur.

O halde, ABC_2 üçgeninde $(a + 3)^2 = a^2 + 9^2$ yazabiliriz.

$a^2 + 6a + 9 = a^2 + 81$ ve a = 12 br bulunur. 2a = 24 br ve

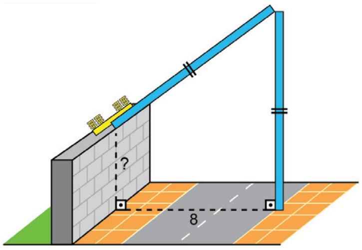
ABC_3 üçgeninde |FA| + $|AC_3|$ = 24 br

|AB| = 12 br ise ABC_3 = (12 – 16 – 20) üçgenidir.

$|AC_3|$ = 20 br olunca

|AF| = 4 br ve |FB| = 12 – 4 = 8 br bulunur.

ÖRNEK



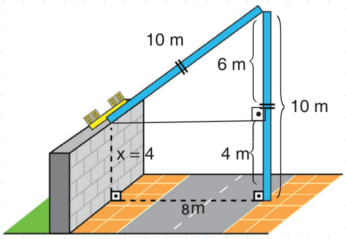
Uzunluğu 20 metre olan mavi renkli elektrik direği, fırtına nedeniyle tam ortadan kırılmış ve direğin uç noktası şekilde görüldüğü gibi direğe 8 metre uzaklıkta bulunan duvarın üzerine gelmiştir.

Buna göre, duvarın yüksekliği kaç metredir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

2018/TYT

Çözüm



Uzunluğu 20 metre olan direk tam ortadan kırılmışsa her bir parçası 10 metredir. Direğin uç noktasının duvara olan uzaklığı 8 metre ise bu uzaklığı direğin ucunun duvara değdiği noktaya paralel olarak taşıdığımızda üst tarafta bir 6 – 8 – 10 özel üçgeni oluşur.

Bu durumda direğin duvardan sonraki yüksekliği 6 metredir.

Bu durumda duvarın yüksekliği x = 10 – 6 = 4 metre bulunur.

Yanıt C

ÖRNEK

Düzlemde bulunan A, B, C, D ve E noktalarıyla ilgili olarak aşağıdakiler biliniyor.

[AB] ⊥ [BC],

[AB] ∩ [CD] = E

|AE| = |BC| = 4 birim,

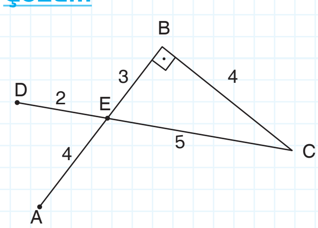
|AB| = |CD| = 7 birim

Buna göre, |DE| uzunluğu kaç birimdir?

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$ D) 2 E) 3

2014 / YGS

Çözüm



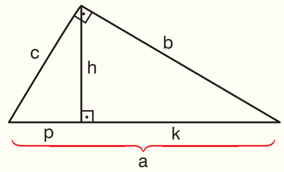
Verilere göre uygun çizim yapıldığında şekildeki uzunluklar elde edilir.

Bu duruma göre

|DE| = 2 br bulunur.

Yanıt D

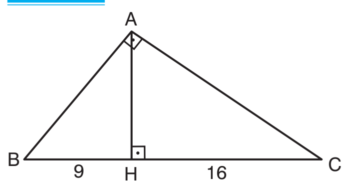
NAVİGASYON



1. $h^2 = p \cdot k$
2. $b^2 = k \cdot a$ ve $c^2 = p \cdot a$
3. $a \cdot h = b \cdot c$ veya $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

- Hipotenüse ait yükseklik çizildiğinde Öklid bağıntılarından birini kullanmamız gereklidir. Bazen, bu yüksekliği bizim çizmemiz gerekebilir.
- Bu üç bağıntıdan hangisini kullanacağımız verilenlere bağlıdır. Fakat, en sık kullanılan 1. sidir.
- Bazı durumlarda uzunlukları harflendirerek denklem kurarız. Dolayısıyla da bu denklemleri çözerek sonuca ulaşırız.

ÖRNEK



[AB] ⊥ [AC]

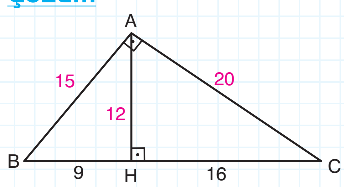
[AH] ⊥ [BC]

|BH| = 9 cm

|CH| = 16 cm

Yukarıdaki ABC dik üçgeninde verilenlere göre, |AB|+|AC|+|AH| toplamı kaç cm dir?

Çözüm



1. bağıntıyı kullanırsak,

$|AH|^2 = 9 \cdot 16 = 144$

$|AH| = 12$ cm olur.

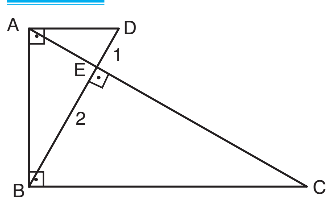
2. bağıntıyı kullanırsak,

$|AB|^2 = 9.(9 + 16) = 225 \Rightarrow |AB| = 15$ cm ve

$|AC|^2 = 16.(9 + 16) = 400 \Rightarrow |AC| = 20$ cm olur.

Dolayısıyla, $|AB|+|AC|+|AH| = 15+20+12 = 47$ cm bulunur.

ÖRNEK



[AB] ⊥ [AD],

[AB] ⊥ [BC]

[AC] ⊥ [BD]

|DE| = 1 cm

|BE| = 2 cm

Yukarıdaki verilere göre, |CE| kaç cm dir?

Çözüm

Bu soruyu Öklid'in 1. bağıntısını kullanarak kolayca çözeceğiz.

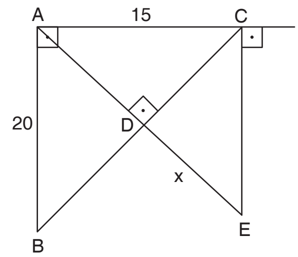
ABD dik üçgeninde $|AE|^2 = |BE| \cdot |ED|$,

$|AE|^2 = 1.2 = 2 \Rightarrow |AE| = \sqrt{2}$ cm olur.

ABC dik üçgeninde $|BE|^2 = |AE| \cdot |CE| \Rightarrow 2^2 = \sqrt{2} \cdot |CE|$

$|CE| = 2\sqrt{2}$ cm bulunur.

ÖRNEK



AB ⊥ AC
AE ⊥ BC
AC ⊥ CE
|AB| = 20 cm
|AC| = 15 cm
|DE| = x

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm'dir?

A) $\frac{15}{2}$ B) $\frac{25}{3}$ C) $\frac{32}{3}$ D) $\frac{27}{4}$ E) $\frac{36}{5}$

2011/LYS

Çözüm

ABC üçgeninde 3k-4k-5k olduğundan IBCI=25 cm olur.

Dik üçgende alan bağıntısı b.c = h.a dan

20.15 = 25.IADI ve IADI = 12 cm olur.

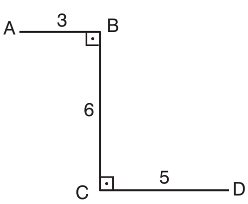
ADC üçgeninde (3k-4k-5k), IDCI = 9 cm ve ACE dik üçgeninde yükseklik bağıntısından $h^2 = p.k$ ⇒ $9^2 = 12.x$ ve

$x = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$ *cm olur.* *Yanıt D*

NAVİGASYON

Birbirine dik doğru parçalarını kullanarak basamaklar halinde oluşturulmuş şekillere "merdiven tipi" diyeceğiz. Bu şekillerde verilen iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamak için bir dik üçgen oluştururuz.

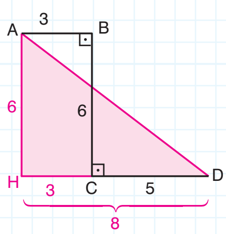
ÖRNEK



$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD}) = 90°$
IABI = 3 cm
IBCI = 6 cm
ICDI = 5 cm

Yukarıda verilenlere göre, A noktası ile D noktası arasındaki uzaklık kaç cm dir?

Çözüm



Soruda IADI nun kaç cm olduğunu bulmamız isteniyor. Bunun için, [CD] nı uzatıp A noktasından bir dikme çizelim.

ABCH bir dikdörtgen olduğu için

IABI = ICHI = 3 cm ve

IBCI = IAHI = 6 cm dir.

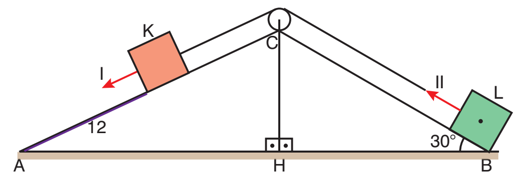
Son olarak ADH dik üçgeninde IAHI = 6 cm ve

IDHI = 8 cm olduğu için, IADI = 10 cm bulunur. (6–8–10 üçgeni)

NAVİGASYON

- Açılarına göre, özel üçgenlerin kenar uzunlukları arasındaki oranı ezbere bilmelisiniz. Dolayısıyla bu üçgenlerden herhangi biri verildiğinde kenar uzunluklarını ezberden hesaplarız. Ya da, uzunlukları kurala göre harflendiririz.
- Özel açılardan 30°, 45° ve 60° verilen şekillerde uygun bir noktadan dik çizerek özel üçgen elde edebiliriz.
- 120°, 135° ve 150° lik açılar verilen şekillerde açının kollarından birini dışarı doğru uzatıp dikme çizerek, özel bir dik üçgen elde edebiliriz.
- Bazen içinde özel açılar olan bir dörtgen verilebilir. Bu durumda, şekli özel üçgenlere parçalayabilir veya özel bir üçgene tamamlayabiliriz.

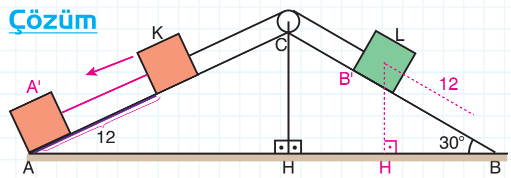
ÖRNEK



Birbirine aynı iple bağlı K ve L cisimleri eğik düzlem üzerinde hareket etmektedir. K cismi 12 metre hareket ederek A' noktasına ulaştığında L cismi II yönünde hareket ederek yukarı çıkmıştır. L cisminin alt köşesi B'nin yeri B' noktasıdır.

Buna göre B' noktasının yer düzlemine uzaklığı kaç metredir?

Çözüm



K cismi 12 metre ilerleyince kendisine bağlı L cismini de 12 metre ilerleyerek B' noktasına taşır. B' noktasının zemine uzaklığı IB'HI olacaktır.

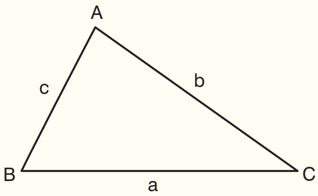
B'HB dik üçgeninde IBB'I = 12 metre ise

IB'HI = $\frac{12}{2}$ *= 6 metre olur.*

(BB'H üçgeni 30° – 60° – 90° üçgenidir.)

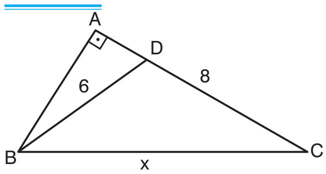
NAVİGASYON

- Bazen üçgenin bir açısının net değeri bilinmeden kenarları ile ilgili değer aralığı bulmamız istenebilir. Bu durumda, $\alpha = 90°$ iken $a^2 = b^2 + c^2$ olduğu için $\alpha > 90°$ ise $a^2 > b^2 + c^2$ ve $a < 90°$ ise, $a^2 < b^2 + c^2$ eşitsizliklerini kurarız.



- α nın 90° yerine özel üçgenlerde kullandığımız açılarla büyüklük küçüklük ilişkisi verilirse, yine benzer bir şekilde "eşit olsa ne olurdu" ana fikriyle işleme başlarız.

ÖRNEK



[AB] ⊥ [AC]

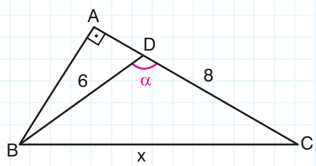
|BD| = 6 br

|CD| = 8 br

|BC| = x br

Yukarıda verilenlere göre, x in yerine kaç farklı tam sayı değeri yazılabilir?

Çözüm

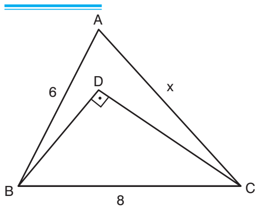


Öncelikle, $m(\widehat{BAD}) = 90°$ olduğu için $m(\widehat{ADB}) < 90°$ ve $m(\widehat{BDC}) = \alpha > 90°$ olduğunu farketmeliyiz.

Dolayısıyla, $x^2 > 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 > 100 \Rightarrow x > 10$ olur.

Ayrıca, BCD üçgeninde üçgen eşitsizliğinden, $2 < x < 14$ olur. Sonuç olarak, iki eşitsizliği birleştirdiğimizde $10 < x < 14$ buluruz. Yani, x yerine 11, 12 ve 13 olmak üzere 3 tam sayı değeri yazabiliriz.

ÖRNEK



$m(\widehat{BDC}) = 90°$

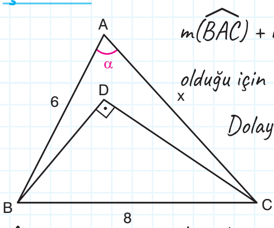
|AB| = 6 br

|BC| = 8 br

|AC| = x br

Yukarıdaki verilere göre, x in kaç farklı tam sayı değeri vardır?

Çözüm



$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{ABD}) + m(\widehat{ACD}) = 90°$ olduğu için $m(\widehat{BAC}) = \alpha < 90°$dir.

Dolayısıyla, $8^2 < 6^2 + x^2 \Rightarrow 28 < x^2$

$2\sqrt{7} < x$ olur.

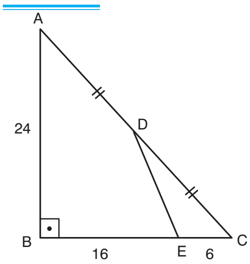
Ayrıca üçgen eşitsizliğinden $2 < x < 14$ bulunur.

Bu iki eşitsizlikten dolayı x in tam sayı değerleri 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 olmak üzere 8 tanedir.

NAVİGASYON

Bazı uzunluk sorularında orta taban çizerek işlem yapmak için yeni bir üçgen oluşturmamız gerekebilir. Bu tarz sorularda bazen tek ipucu orta noktadan çizilen sıradan bir doğru parçasıdır.

ÖRNEK



ABC bir dik üçgen

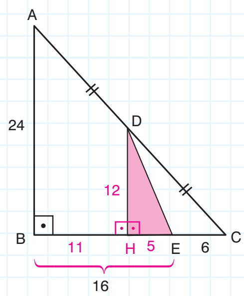
|AD| = |CD|

|AB| = 24 cm, |BE| = 16 cm

|CE| = 6 cm

Yukarıda verilenlere göre, |DE| kaç cm dir?

Çözüm



[DH] ⊥ [BC] çizersek [AB] kenarının orta tabanını çizmiş oluruz. Bu yüzden,

|BH| = |CH| = 11 cm,

|DH| = 12 cm ve

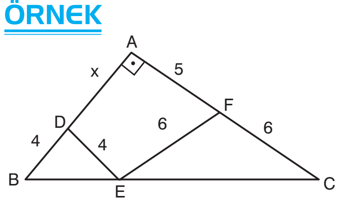
|EH| = 5 cm dir.

DHE dik üçgeni ise, 5–12–13 üçgeni olduğu için, |DE| = 13 cm bulunur.

NAVİGASYON

Bazı uzunluk sorularında gizlenmiş ayrıntılar vardır. Bunları yakalamak için açıları kullanmak gereklidir. Yoksa, sorunun çözümünü bulmak mümkün olmayabilir. Şimdilik, bu tarz soruların dik üçgenle bağlantılı olanlarını bir örnekle görelim.

ÖRNEK



ABC bir dik üçgen

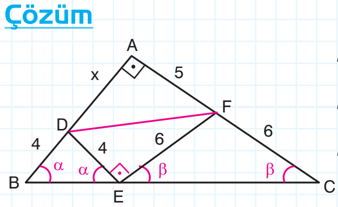
|BD| = |DE| = 4 birim

|EF| = |CF| = 6 birim

|AF| = 5 birim

Yukarıdaki verilere göre, |AD| = x kaç birimdir?

Çözüm



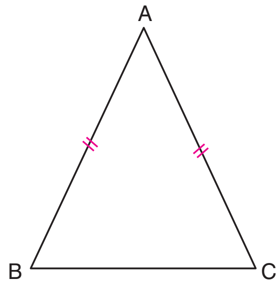
$m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{DEB}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ECF}) = m(\widehat{CEF}) = \beta$ diyelim.

ABC üçgeninde iç açıları toplarsak, $\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ olur. Bu yüzden $m(\widehat{DEF}) = 90°$dir. Dolayısıyla, [DF]nı çizdiğimizde ADF ve DEF dik üçgenlerini elde ederiz.

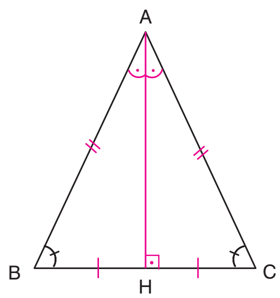
Son olarak Pisagor bağıntısından,

$|DF|^2 = 4^2 + 6^2 = x^2 + 5^2 \Rightarrow x^2 = 27 \Rightarrow |AD| = x = 3\sqrt{3}$ birim buluruz.

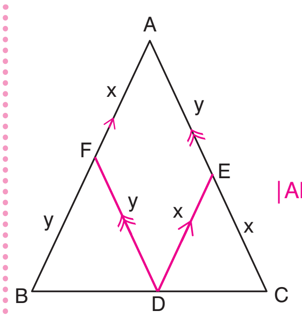
Konu Anlatımı



İki kenarı eşit olan üçgene ikizkenar üçgen dendiğini biliyoruz. İkizkenar üçgenle ilgili açı sorularının nasıl çözüldüğünü daha önce işlemiştik. Bu ünitede uzunluk sorularının nasıl çözüldüğünü işleyeceğiz.



İkizkenar üçgenin tepe köşesinden çizilen açıortay, kenarortay ve yüksekliğin çakışık olduğunu öğrenmiştiniz. İkizkenar üçgenle ilgili uzunluk sorularını çözerken çoğunlukla bu özellikten faydalanacağız.

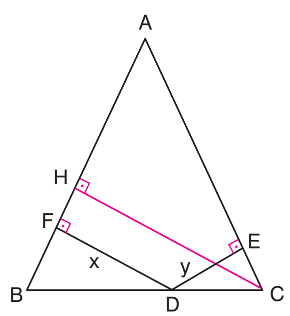


[DE] // [AB]

[DF] // [AC]

|AB| = |AC| = |DE| + |DF|

Bir ikizkenar üçgenin tabanı üzerindeki bir noktadan ikiz kenarlara çizilen paralel doğru parçalarının uzunluklar toplamı, ikiz kenarlardan birinin uzunluğuna eşittir. Ayrıca, oluşan küçük üçgenler de ikizkenardır.



[CH] : h_c

[BH'] : h_b

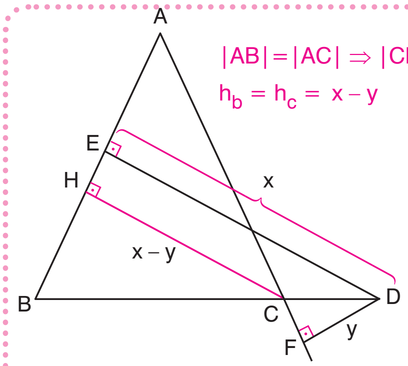
|AB| = |AC|

⇓

|CH| = |DE| + |DF|

$h_b = h_c = x + y$

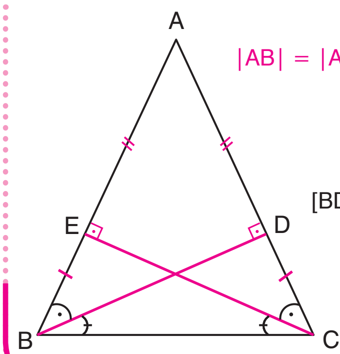
İkizkenar üçgenin tabanı üzerindeki bir noktadan ikiz kenarlara çizilen dikmelerin toplamı, ikiz kenarlardan birine ait yüksekliğe eşittir.



|AB| = |AC| ⇒ |CH| = |DE| – |DF|

$h_b = h_c = x - y$

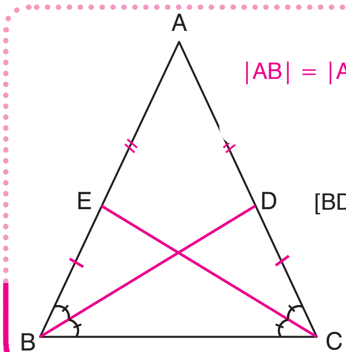
İkizkenar üçgenin tabanının uzantısı olan bir noktadan ikiz kenarlara çizilen dikmelerin farkı, ikiz kenarlardan birine ait yüksekliğe eşittir.



|AB| = |AC| ⇔ |BD| = |CE|

$h_b = h_c$

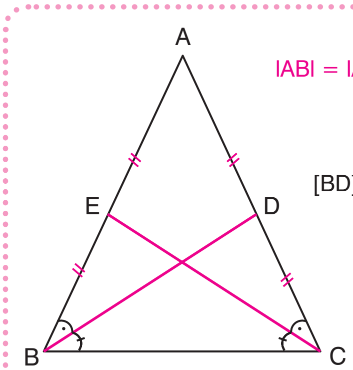
[BD], [CE] yükseklikler



|AB| = |AC| ⇔ |BD| = |CE|

$n_B = n_C$

[BD], [CE] açıortaylar



IABI = IACI ⇔ IBDI = ICEI

$V_b = V_c$

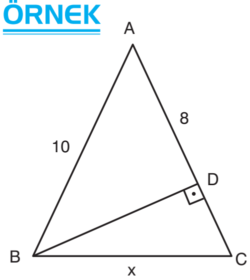
[BD], [CE] kenarortaylar

İkizkenar üçgenin ikiz kenarlarına çizilen yardımcı elemanlar (açıortay, kenarortay ve yükseklik) birbirine eştir.

NAVİGASYON

- Uzunluk soruları çoğunlukla dik üçgenler kullanılarak çözülür. Bu yüzden, ikizkenar üçgenin bulunduğu şekillerde kullanabileceğimiz bir dik üçgen varsa, öncelikle onu kullanırız. Eğer yoksa, tabana ait yüksekliği çizerek çözüme ulaşırız.
- Tıpkı üçgende açı sorularında olduğu gibi uzunluk sorularında da bir üçgenin ikizkenar olduğunu bizim anlamamız gerekebilir. Bu yüzden, bir doğru parçası açıortay, kenarortay ve yükseklik özelliklerinden herhangi ikisini sağlıyorsa, orada bir ikizkenar üçgen saklanmış olduğunu unutmayınız.

ÖRNEK



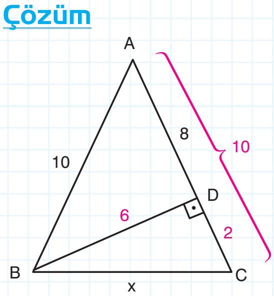
|AB| = |AC| = 10 br

|AD| = 8 br

|BC| = x br

Şekildeki ABC ikizkenar üçgeninde verilenlere göre, |BC| = x kaç br dir?

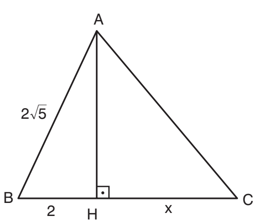
Çözüm



ABD dik üçgeninde
|AB| = 10 br ve
|AD| = 8 br olduğu için,
|BD| = 6 br (6 – 8 – 10 üçgeni) dir. Ayrıca,
|CD| = 10 – 8 = 2 br dir.
Bu yüzden, BCD dik üçgeninde Pisagor bağıntısını kullanırsak,

$x^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow |BC| = x = 2\sqrt{10}$ br bulunur.

ÖRNEK



|AC| = |BC|

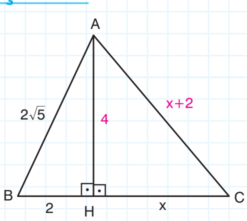
|AB| = $2\sqrt{5}$ cm

|BH| = 2 cm

|CH| = x cm

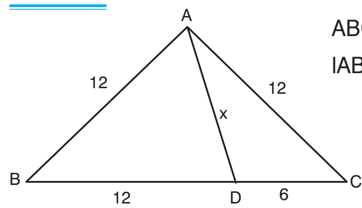
Şekildeki ABC ikizkenar üçgeninde verilenlere göre, x kaç cm dir?

Çözüm



ABH dik üçgeninde
$(2\sqrt{5})^2 = 2^2 + |AH|^2$
$20 = 4 + |AH|^2$
$|AH| = 4$ cm dir.
ABC ikizkenar üçgeninde
$|AC| = |BC| = x + 2$ cm dir.
Dolayısıyla, AHC dik üçgeninde Pisagor bağıntısından
$(x+2)^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 16 + x^2 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$ cm bulunur.

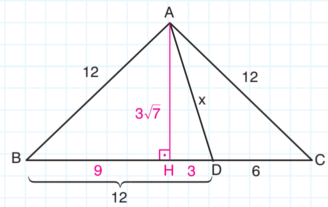
ÖRNEK



ABC bir üçgen
|AB| = |AC| = |BD| = 12 cm
|CD| = 6 cm
|AD| = x cm

Yukarıdaki verilere göre, x kaç cm dir?

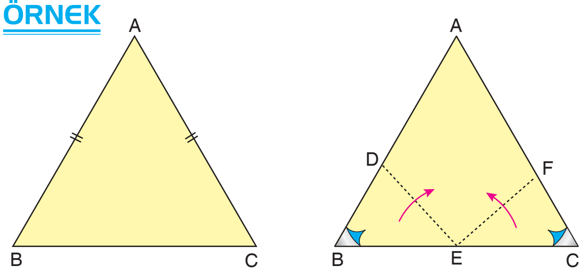
Çözüm



|AB| = |AC| olduğu için,
[AH] dikmesini çizdiğimizde
|BH| = |CH| = 9 cm olur.
Dolayısıyla, |DH| = 3 cm dir.

ABH dik üçgeninde, $12^2 = 9^2 + |AH|^2 \Rightarrow 144 = 81 + |AH|^2$
$\Rightarrow |AH|^2 = 63 \Rightarrow |AH| = 3\sqrt{7}$ cm olur.
ADH dik üçgeninde ise, $x^2 = 3^2 + (3\sqrt{7})^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 63$
$\Rightarrow x^2 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$ cm bulunur.

ÖRNEK



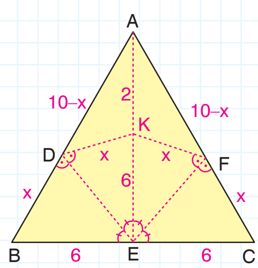
Şekil I Şekil II

Burak, önyüzü sarı, arka yüzü mavi renkte olan ABC ikizkenar üçgeni şeklindeki bir kâğıt (şekil I) alıyor. Daha sonra B köşesini [DE], C köşesini [EF] boyunca ön yüze katladığında K noktasında çakışıyor.

|AB| = |AC|, |AK| = 2 br, |KE| = 6 br

Buna göre Burak'ın katladığı kâğıdın ön yüzünde görünen sarı bölgenin çevresi kaç br olacaktır?

Çözüm



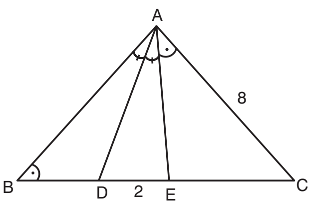
Katlama yapılan kısımlar, katlanan kısımla aynı şekildedir. Yani BED ile KED ve ECF ile EKF eş üçgenlerdir.
Bu yüzden |EK| = |BE| ve
|EK| = |EC| dir.
ABC ikizkenar olduğu için [AE] aynı zamanda açıortay ve yüksekliktir.

ABE üçgeninde |AE| = 8 br, |BE| = 6 br ise |AB| = |AC| = 10 br dir.
|BD| = |DK| = x ve |FK| = |EF| = x dersek,
|AD| = |AF| = 10 – x br olur.
Ç(ADKF) = (10–x)+(10–x) + x + x = 20 br bulunur.

NAVİGASYON

Daha önce de belirtiğimiz gibi bazı uzunluk sorularını çözmek için açılardan faydalanmak gereklidir. Bu yüzden, ikizkenar üçgenin taban açılarının eşitliğini kullanarak bazı soruların çözümünü buluruz. Yani, bazen eşit açılar sayesinde, şekilde gizlenmiş ikizkenar üçgenler bulabiliriz.

ÖRNEK



ABC bir üçgen

$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE})$

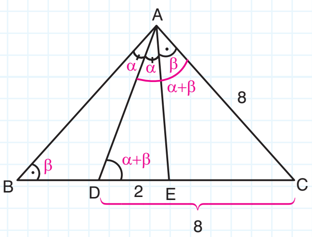
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CAE})$

$|DE| = 2$ cm

$|AC| = 8$ cm

Yukarıda verilenlere göre, |CE| kaç cm dir?

Çözüm



$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE}) = \alpha$ ve

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{CAE}) = \beta$

olsun. ABD üçgeninde "iki iç açı bir dış açıya eşittir" kuralından dolayı,

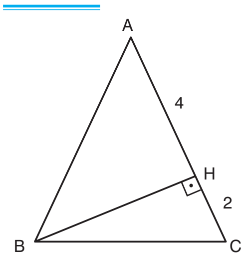
$m(\widehat{ADC}) = \alpha + \beta$ olur.

Bu yüzden, $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC}) = \alpha + \beta$ olur.

Yani, ACD ikizkenar üçgendir.

Dolayısıyla, $|AC| = |CD| = 8$ cm ve $|CE| = 8 - 2 = 6$ cm bulunur.

ÖRNEK



$[BH] \perp [AC]$

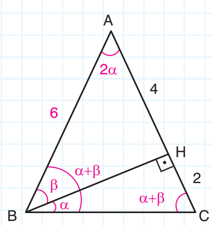
$|AH| = 4$ br

$|CH| = 2$ br

$m(\widehat{BAC}) = 2\, m(\widehat{CBH})$

Yukarıdaki verilere göre, |BH| kaç br dir?

Çözüm



$m(\widehat{BAC}) = 2m(\widehat{CBH}) = 2\alpha$ olsun.

Ayrıca, $m(\widehat{ABH}) = \beta$ olsun.

ABH üçgeninde iç açıları toplarsak,

$2\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow 2\alpha + \beta = 90°$ olur.

BHC dik üçgeninde iç açılar toplamından

$\alpha + 90° + m(\widehat{ACB}) = 180° \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 90° - \alpha$ olur.

Aynı zamanda, $2\alpha + \beta = 90°$ olduğu için

$m(\widehat{ACB}) = 2\alpha + \beta - \alpha = \alpha + \beta$ olur.

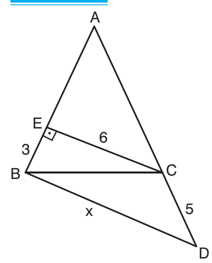
Dolayısıyla, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = \alpha + \beta$ olduğu için,

$|AB| = |AC| = 6$ br dir. Son olarak, ABH dik üçgeninde Pisagor bağıntısından $6^2 = 4^2 + |BH|^2 \Rightarrow |BH| = 2\sqrt{5}$ br bulunur.

NAVİGASYON

- Konunun başında, ikiz kenarlara ait yardımcı elemanların eş olduğunu göstermiştik. Bu yüzden, eğer bu yardımcı elemanlardan biri çizilmiş ve soruyu çözmemize yardımcı değil ise, eşi olan yardımcı elemanı çizerek çözüme ulaşırız.
- Konu başında ayrıca, ikizkenar üçgenin tabanı üzerindeki bir noktadan çizilen paraleller veya dikmeler ile ikiz kenarlar arasındaki ilişkiyi göstermiştik. Dolayısıyla, bu çizimleri gördüğümüzde, karşılık gelen kuralı kullanacağız.

ÖRNEK



$|AB| = |AC|$

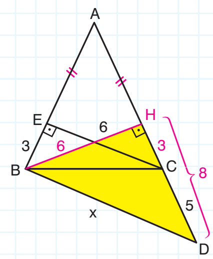
$[CE] \perp [AB]$

$|BE| = 3$ cm, $|CD| = 5$ cm

$|CE| = 6$ cm, $|BD| = x$ cm

Şekildeki ABD üçgeninde verilenlere göre, x kaçtır?

Çözüm



$|AB| = |AC|$ olduğu için,

$[BH] \perp [AC]$ çizdiğimizde,

$|BH| = |CE| = 6$ cm,

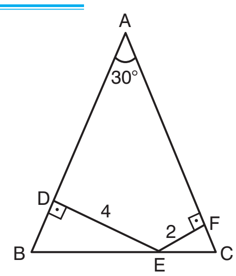
$|BE| = |CH| = 3$ cm ve

$|AE| = |AH|$ olur.

Dolayısıyla, BDH dik üçgeninde

$|BH| = 6$ cm ve $|DH| = 8$ cm olduğu için, $|BD| = x = 10$ cm bulunur.

ÖRNEK



ABC bir ikizkenar üçgen

$|AB| = |AC|$

$|ED| = 4$ cm

$|EF| = 2$ cm

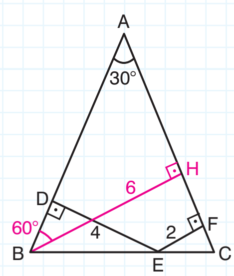
$[ED] \perp [AB]$

$[EF] \perp [AC]$

$m(\widehat{BAC}) = 30°$

Yukarıda verilenlere göre, |AB| kaç cm dir?

Çözüm



$[BH] \perp [AC]$ çizersek,

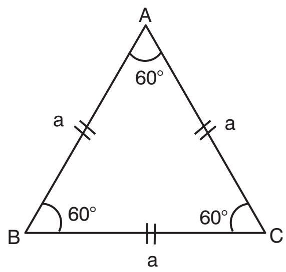
$|BH| = |ED| + |EF| = 4 + 2 = 6$ cm

olur.

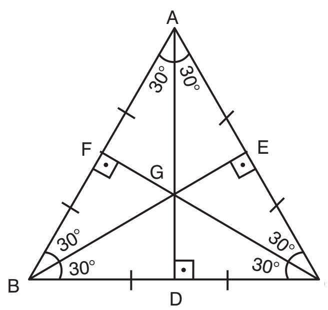
Ayrıca, ABH $30° - 60° - 90°$ özel üçgenini elde ederiz.

Dolayısıyla,

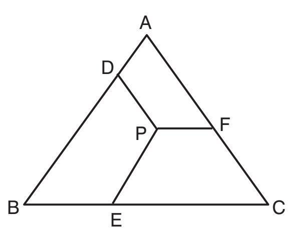
$|AB| = 2|BH| = 12$ cm dir.



Eşkenar üçgenin üç kenarının da eşit ve açılarının herbirinin 60° olduğunu biliyoruz. Daha önce, açı sorularının nasıl çözüldüğünü işlemiştik. Şimdi uzunluk sorularının nasıl çözüleceğini işleyeceğiz. Ayrıca, ikizkenar üçgen ile ilgili öğrendiğimiz özellik ve çözüm yöntemlerinin eşkenar üçgen için de geçerli olduğunu unutmayınız.



Eşkenar üçgenin herhangi bir köşesinden çizilen açıortay, kenarortay ve yükseklik çakışıktır. Aynı zamanda, üçgeni simetrik iki parçaya böler. Ayrıca, herhangi bir köşesinden çizilen yardımcı elemanlar birbirine eşit olur.

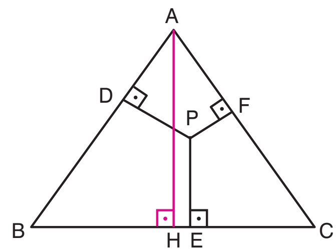


[PD] // [AC], [PE] // [AB], [PF] // [BC]

$\Rightarrow$ |AB| = |AC| = |BC| = |PD| + |PE| + |PF|

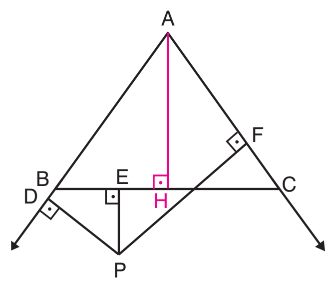
Eşkenar üçgenin iç bölgesindeki bir noktadan kenarlara çizilen paralellerin uzunluklar toplamı eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna eşittir.

Konu Anlatımı



|AH| = |PD| + |PE| + |PF|

Eşkenar üçgenin iç bölgesindeki bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin toplamı, herhangi bir kenara ait yüksekliğe eşittir.



|AH| = |PD| + |PF| – |PE|

Eşkenar üçgenin dışındaki bir noktadan kenarlara dikmeler çizilmiş olsun. Noktanın bulunduğu taraftaki kenara çizilen dikmeyi, diğer dikmelerin toplamından çıkarırsak, bir yüksekliğe eşit olur.

Bir kenarı a bir alan eşkenar üçgenin çevresi,

Ç = 3a br,

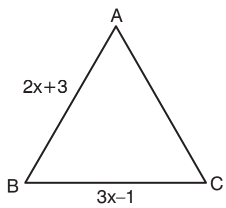
Yüksekliği, $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ br

Alanı, $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ br^2 dir.

NAVİGASYON

- Uzunluk sorularında, aynı açı sorularında olduğu gibi, kenarların eşitliğinden faydalanacağız. Fakat bu defa, bir kenar uzunluğu ile ilgili bilgi verildiyse, bütün kenarlara aynı bilgiyi yazacağız. Eğer verilmediyse, harflendirmeler yaparak denklem kurabileceğiz.
- Eşkenar üçgenin iç açıları 60° dir. Bu yüzden, çizili herhangi bir dikme varsa, 30°– 60°– 90° özel üçgeni de vardır. Dolayısıyla, ondan faydalanarak sonuca gidebiliriz. Eğer, çizili bir dikme yoksa, kendimiz çizebiliriz. Ya da kosinüs teoremini kullanabiliriz.

ÖRNEK



IABI = 2x + 3 cm

IBCI = 3x – 1 cm

Şekilde ABC bir eşkenar üçgen olduğuna göre, IACI kaç cm dir?

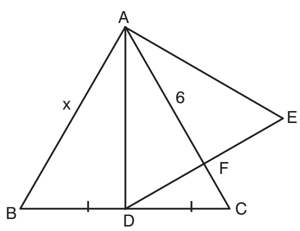
Çözüm

ABC eşkenar üçgen olduğu için IABI = IBCI = IACI dir.

Yani, $2x+3 = 3x-1 \Rightarrow x=4$ olur.

Bu yüzden, IACI = IABI = 2.4+3 = 11 cm bulunur.

ÖRNEK



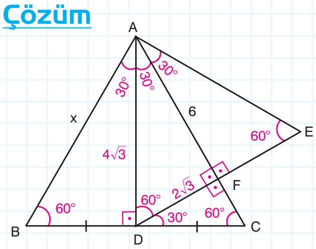
ABC ve ADE eşkenar üçgenler, IBDI = ICDI

IAFI = 6 cm

IABI = x cm

Verilenlere göre, x kaç cm dir?

Çözüm



ABC eşkenar üçgeninde IBDI = ICDI olduğu için [AD] ⊥ [BC] ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD}) = 30°$ dir.

Dolayısıyla, diğer açıları yerlerine yazdığımızda, şekilde 30°– 60°– 90° özel üçgenleri olduğunu görürüz. Öncelikle, ADF üçgenine bakalım.

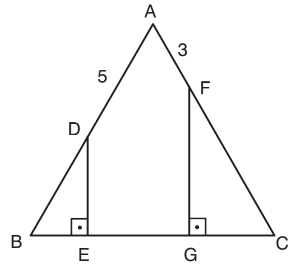
IAFI=6 cm olduğu için, $IDFI = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ cm ve

$IADI = 2.2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm dir.

Şimdi de ABD üçgenine bakalım. $IADI=4\sqrt{3}$ cm olduğu için

$IBDI = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$ cm ve IABI = x = 2.4 = 8 cm buluruz.

ÖRNEK



[DE] ⊥ [BC]

[FG] ⊥ [BC]

IADI = 5 cm

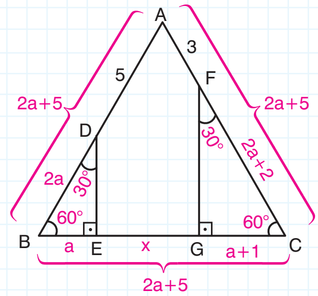
IAFI = 3 cm

Şekilde ABC bir eşkenar üçgendir.

Buna göre, IEGI kaç cm dir?

Çözüm

I. yol



IBEI = a cm ve

IEGI = x cm diyelim.

BDE 30° - 60° - 90° üçgeni olduğu için

IBDI = 2a cm olur.

Ayrıca, ABC bir eşkenar üçgen olduğu için,

IABI = IACI = IBCI = 2a + 5 cm olur.

Bu yüzden, IFCI = IACI – IAFI = 2a+5– 3 = 2a+2 cm dir.

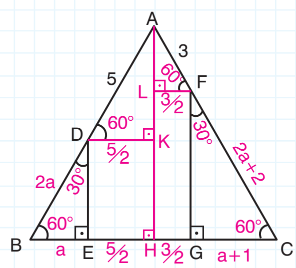
CFG üçgeni de 30°– 60°– 90° özel üçgeni olduğundan dolayı,

ICGI = a+1 cm olur.

Sonuç olarak, IBCI = I BEI + IEGI + IGCI

$\Rightarrow 2a + 5 = a + x + a + 1 \Rightarrow x = 4$ cm bulunur.

2. yol



[AH] dikmesini çizersek $m(\widehat{BAH})=m(\widehat{CAH})=30°$ olur.

Ayrıca,

[DK] ⊥ [AH] ve

[FL] ⊥ [AH] çizersek

iki tane 30° – 60° – 90° özel üçgeni oluşturmuş oluruz.

Dolayısıyla; $IDKI = \frac{5}{2}$ cm ve $IFLI = \frac{3}{2}$ cm dir.

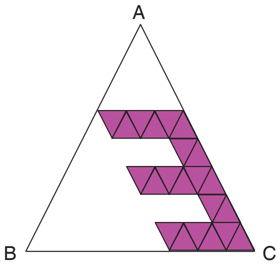
Bu durumda,

DKHE ve FLHG birer dikdörtgen olduğu için

$IEHI = IDKI = \frac{5}{2}$ cm ve $IFLI = IGHI = \frac{3}{2}$ cm dir.

Sonuç olarak, $IEGI = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$ cm bulunur.

ÖRNEK



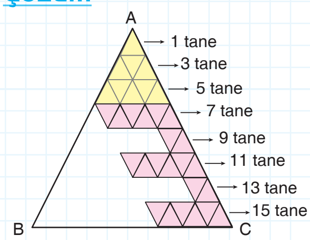
Aslı Öğretmen, bir etkinlikte ABC eşkenar üçgeninin içindeki özdeş eşkenar üçgenleri şekildeki gibi boyayarak 3 rakamını bir kâğıda resmetmiştir.

ABC eşkenar üçgeninin alanı 96 birimkare olduğuna göre, boyalı alan kaç birimkaredir?

A) 22 B) 27 C) 33 D) 36 E) 44

2017/YGS

Çözüm



ABC üçgeninde her satırda kaç tane eşkenar üçgen olduğu gösterilmiştir.

Bu durumda

1+3+5 +...+ 15 = 64 tane küçük eşkenar üçgen vardır. Taralı küçük eşkenar üçgenler de 22 tanedir.

Orantı ile 64 tanesi $96\ br^2$ ise

22 tanesi x

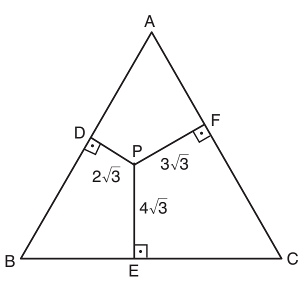
$$x = \frac{22 \cdot 96}{64} = 33\ br^2 \text{ bulunur.}$$

Yanıt C

NAVİGASYON

- Eşkenar üçgenin iç veya dış bölgesinde bulunan bir noktadan çizilen dikmelerin yükseklik, paralellerin ise, bir kenar uzunluğunu verdiğini ünite şemasında gördünüz. Dolayısıyla, bu kurallara ait sorulan gördüğümüzde kolayca cevaba ulaşabiliriz.
- Eğer, bu kuralları unutursak veya daha ayrıntı bir bilgi sorulursa, yeni dikmeler veya paraleller çizeriz. Böylece işlem yapabileceğimiz yeni eşkenar üçgenler veya 30° - 60° - 90° özel üçgenleri elde ederiz.

ÖRNEK



[PD] ⊥ [AB]

[PE] ⊥ [BC]

[PF] ⊥ [AC]

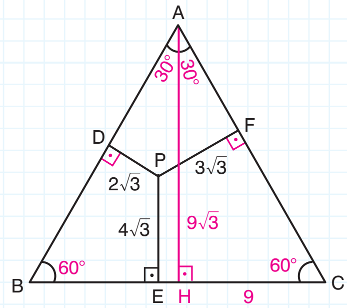
|PD| = $2\sqrt{3}$ cm

|PF| = $3\sqrt{3}$ cm

|PE| = $4\sqrt{3}$ cm

Yukarıda verilenlere göre, ABC eşkenar üçgeninin çevresi kaç cm dir?

Çözüm



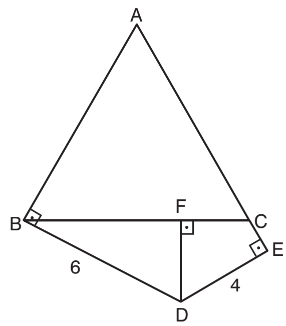
P noktasından çizilen dikmelerin toplamının eşkenar üçgenin bir yüksekliğine eşit olduğunu biliyoruz.

Bu yüzden,

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \quad a = 18\ cm$$

Ç = 3 . 18 = 54 cm olur.

ÖRNEK



[AB] ⊥ [BD]

[AE] ⊥ [DE]

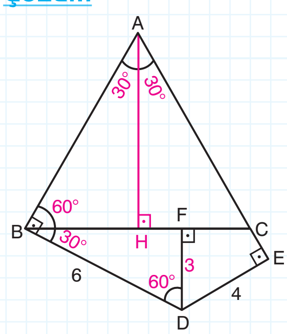
[BC] ⊥ [DF]

|BD| = 6 cm

|DE| = 4 cm

Şekilde, ABC bir eşkenar üçgen olduğuna göre, [BC] kenarına ait yükseklik kaç cm dir?

Çözüm



$m(\widehat{ABC}) = 60°$ olduğu için,

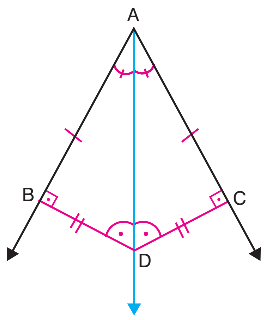
$m(\widehat{DBC}) = 90° - 60° = 30°$ dir.

Dolayısıyla, BFD üçgeninde

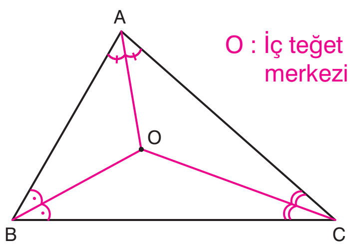
$|FD| = \frac{6}{2} = 3$ cm dir.

Dış bölgedeki noktadan çizilen dikmelerle ilgili kuralı kullanırsak,

|AH| = |DB| + |DE| – |DF| = 6 + 4 – 3 = 7 cm buluruz.

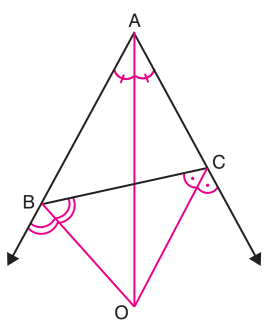


Açıortay üzerindeki herhangi bir noktadan açı kollarına dikmeler çizildiğinde, birbirleriyle simetrik ve eş olan iki dik üçgen oluşur. Bu kuralı tersinden şöyle de yorumlayabiliriz. Açıortay, açı kollarından eşit uzaklıktaki noktalardan oluşur.



O : İç teğet çemberin merkezi

Üçgenin iç açıortaylarının bir noktada kesiştiğini daha önce de görmüştük. Şimdi uzunluk sorularında bu bilgiden nasıl faydalanacağımızı öğreneceksiniz.

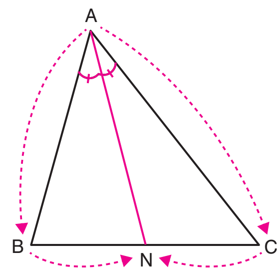


O : Dış teğet çemberin merkezi

Üçgenin iki dış açıortay ile bir iç açıortayının bir noktada kesiştiğini daha önce işlemiştik. Şimdi bu kuraldan uzunluk sorularında nasıl faydalanacağımıza da değineceğiz.

Konu Anlatımı

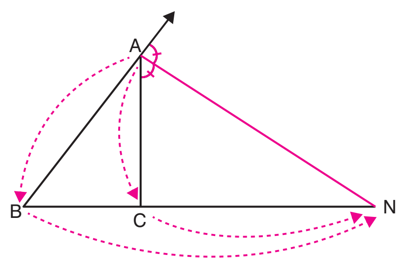
ÜÇGENDE İÇ AÇIORTAY



- $\dfrac{|AB|}{|BN|} = \dfrac{|AC|}{|CN|}$

Üçgende çizilen iç açıortay gittiği kenarı diğer iki kenarla orantılı parçalara ayırır. Yani, uzun kenarın tarafındaki parça uzundur.

ÜÇGENDE DIŞ AÇIORTAY

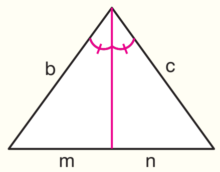


- $\dfrac{|AB|}{|BN|} = \dfrac{|AC|}{|CN|}$

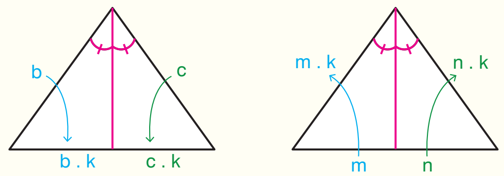
Tıpkı iç açıortayda olduğu gibi, dış açıortay çizildiğinde de kenarlar ile oluşturduğu parçalar arasında orantı vardır.

NOT: Üçgende aynı köşeye ait bir iç, bir dış açıortay dik kesişir.

NAVİGASYON

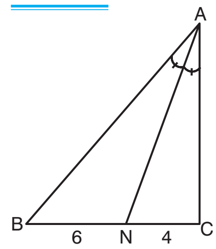


$\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$ veya $\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$



- Üçgenin bir köşesinden iç açıortay çizildiğinde, öncelikle orantı kuralını kullanarak hesaplama yaparız. Bu işlemleri daha hızlı ve pratik yapmak için ise, orantıya göre harflendirme yapabiliriz. Yani, örneğin b = 8 birim ve c = 6 birim ise, m = 4k birim ve n = 3k birim olarak harflendirebiliriz.
- Şekilde birden fazla açıortay varsa, teker teker ele alarak soruyu çözebiliriz.

ÖRNEK

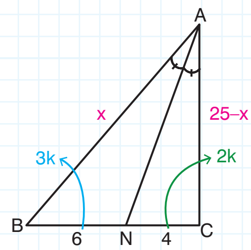


ABC bir üçgen, [AN] iç açıortay

IBNI = 6 cm, ICNI = 4 cm

Şekilde verilen ABC üçgeninin çevresi 35 cm olduğuna göre, IABI kaç cm dir?

Çözüm



I. yol:

$Ç(ABC) = |AB| + |AC| + 10 = 35$

$|AB| + |AC| = 25$ cm dir.

Dolayısıyla, $|AB| = x$ cm ve

$|AC| = 25 - x$ cm diyebiliriz.

Orantı kuralından,

$\frac{x}{6} = \frac{25-x}{4} \Rightarrow 4x = 150 - 6x \Rightarrow x = 15$ bulunur.

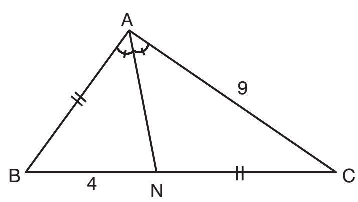
II. yol:

$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ olduğu için $|AB| = 3k$ cm ve $|AC| = 2k$ cm

diyelim. $3k + 2k + 10 = 35 \Rightarrow k = 5$ olur.

Dolayısıyla, $|AB| = 3k = 15$ cm bulunur.

ÖRNEK



ABC bir üçgen

[AN] iç açıortay

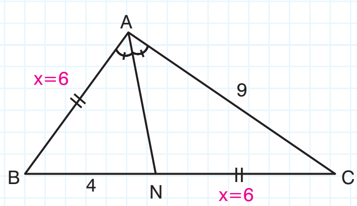
IABI = ICNI

IACI = 9 birim

IBNI = 4 birim

Yukarıda verilenlere göre, ABC üçgeninin çevresi kaç birimdir?

Çözüm



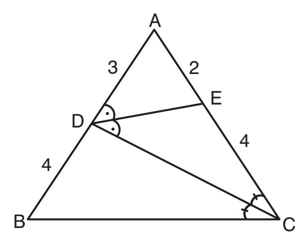
$|AB| = |CN| = x$ birim olsun.

Orantı kuralını kullanırsak;

$\frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ olur.

Dolayısıyla, $Ç(ABC) = 6 + 9 + 10 = 25$ birim dir.

ÖRNEK



ABC bir üçgen

[CD] ve [DE] açıortay

IAEI = 2 br

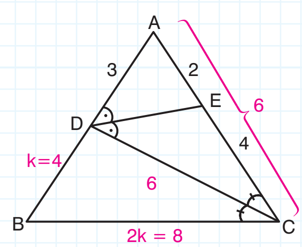
IADI = 3 br

ICEI = 4 br

IBDI = 4 br

Yukarıda verilenlere göre, BDC üçgeninin çevresi kaç br dir?

Çözüm



Öncelikle, [DE] açıortayına odaklanırsak,

$\frac{3}{2} = \frac{|CD|}{4} \Rightarrow |CD| = 6$ br olduğunu görürüz.

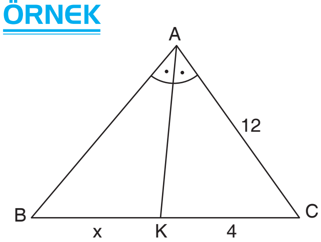
[CD] açıortay olduğu için

$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}$

$\frac{6}{3} = \frac{|BC|}{4}$ ve $|BC| = 8$ br olur.

$Ç(BDC) = 4 + 6 + 8 = 18$ br bulunur.

ÖRNEK



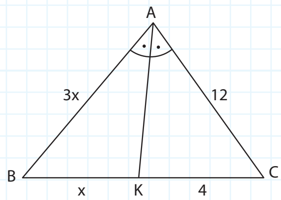
ABC bir üçgen
[AK] açıortay
$|AC| = 12$ cm,
$|KC| = 4$ cm,
$|BK| = x$ cm

Şekildeki ABC üçgeninin çevresi 44 cm olduğuna göre, x kaç cm'dir?

A) 6 B) 7 C) 8 D) $\frac{11}{2}$ E) $\frac{13}{2}$

2011 / LYS

Çözüm



İç açı ortay kuralına göre

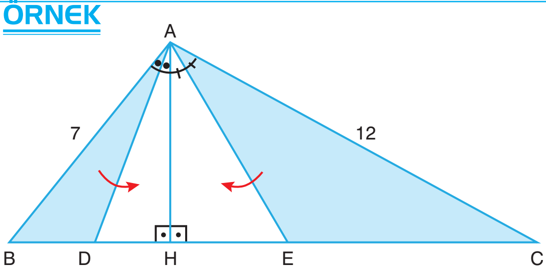
$\frac{|AB|}{|BK|} = \frac{|AC|}{|KC|}$ den

$\frac{|AB|}{x} = \frac{12}{4}$ ve $|AB| = 3x$ olur.

$Ç(ABC) = 3x + (x+4) + 12$

$44 = 4x + 16$ ve $x = \frac{28}{4} = 7$ cm olur.

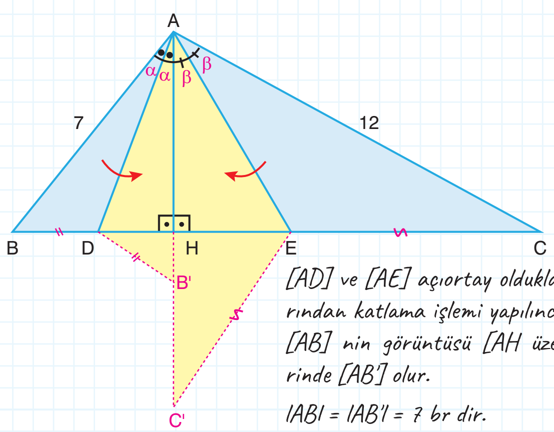
ÖRNEK



ABC üçgeninde $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAH})$, $m(\widehat{HAE}) = m(\widehat{EAC})$, $[AH] \perp [BC]$ dir. [AB], [AD] kenarı kat çizgisi olacak şekilde katlandığında B'nin yeni konumu B', [AC], [AE] kenarı kat çizgisi olacak şekilde katlandığında C'nin yeni konumu C' olmaktadır.

Buna göre, IB'C'I = x kaç br dir?

Çözüm



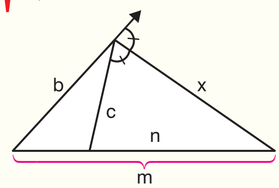
[AD] ve [AE] açıortay olduklarından katlama işlemi yapılınca [AB] nin görüntüsü [AH üzerinde [AB'] olur.

$|AB| = |AB'| = 7$ br dir.

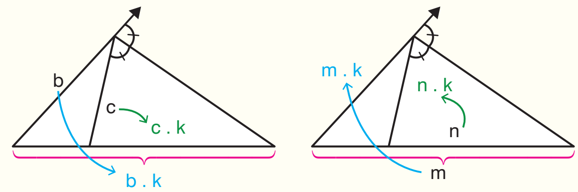
Diğer taraftan AEC üçgeninin katlama sonucu [AC] nin görüntüsü [AH üzerinde [AC'] olur. $|AC'| = |AC| = 12$ br dir.

$|B'C'| = |AC'| - |AB'| = 12 - 7 = 5$ br olur.

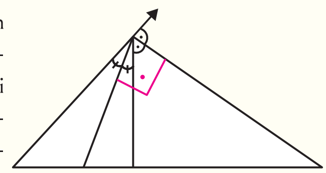
NAVİGASYON



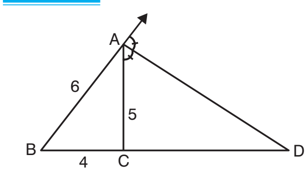
$\frac{b}{m} = \frac{c}{n}$ veya $\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$



- Tıpkı iç açıortayda olduğu gibi dış açıortayda da önce orantı kuralı kullanılır. Bu yüzden, yine aynı şekilde orantıya göre harflendirme yapabiliriz.
- Aynı köşeden hem iç hem de dış açıortay çizilmişse, iki farklı soru tipi karşımıza çıkar. Birincisi, açıortayları tek tek kullanmamız gereken tip. İkincisi ise, açıortayların birbirine dik olmasını kullanmamız gereken tip. Nadiren de olsa, bu iki tip bir arada sorulabilir.



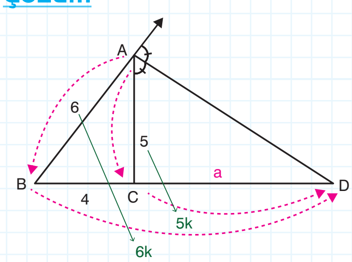
ÖRNEK



ABD bir üçgen
$|BC| = 4$ cm
$|AC| = 5$ cm
$|AB| = 6$ cm

Yukarıdaki şekilde [AD], ABC üçgeninin dış açıortayı olduğuna göre, |CD| kaç cm dir?

Çözüm



Önce |CD| nu hesaplamamız gerekiyor. Bunun için iki farklı yolumuz var.

I.yol

$|CD| = a$ cm diyelim.

Orantı kuralından,

$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{a}{4+a} \Rightarrow 6a = 20 + 5a \Rightarrow |CD| = a = 20$ cm

II.yol

$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{6}{5}$ olduğu için $|BD| = 6k$ cm ve $|CD| = 5k$ cm diyelim.

Bu durumda, $|BD| = 6k = 5k + 4 \Rightarrow k = 4$ olur.

Bu yüzden, $|CD| = 5k = 20$ cm bulunur.